MATEMATIK
Chalmers

Tentamen i Inledande matematik för Z1, (TMV120)
Tid: 2011-01-15, kl 08.30 - 12.30
Hjälpmedel: Inga, ej heller miniräknare.
Telefonvakt: Oskar Hamlet, 0703–088304

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.
Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.
(Bonuspoäng från duggor, Matlab och SI hösten 2010 inkluderas.)
Ett facit kommer att mailas ut direkt efter tentan och fullständiga ösningar läggs ut på kursens webbsida senast 17/01.
Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Angående granskning, se kursens hemsida www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv120/1011/

---

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.

   a) För vilka reella tal är $\dfrac{x^3-3x^2}{x-2} < 0$? (2p)

   b) Lös ekvationssystemet $\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2x + y + 3z = 2 \\ 2x + 3y + 5z = 3 \end{cases}$ (2p)

   c) Bestäm vilken som helst lösning till ekvationen $z^4 - 2z^2 + 2 = 0$. (2p)
   (Obs! Du får lämna svaret i polär form).

   d) Funktionen $f(x) = e^{x^2}$ är inverterbar då $x \in (0, \infty)$. Bestäm $(f^{-1})'(e^4)$. (2p)

   e) Beräkna följande gränsvärden: (3p)

$$\alpha)\quad \lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad \beta)\quad \lim_{x\to 0+} x^{\ln x} \qquad \gamma)\quad \lim_{x\to 1} \frac{\sin \pi x}{x-1}.$$

   f) En partikel rör sig moturs längs enhetscirkeln (dvs cirklen med radie 1m och centrum i origo) i en konstant hastighet på 2m/s. Hur snabbt ökar partikelns avstånd från punkten $(1,0)$ i det ögonblick då den passerar igenom punkten $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. (3p)

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar.

2. Låt $A = (1,1,1)$, $B = (2,3,1)$, $C = (3,1,2)$, $D = (-1,2,1)$, $E = (0,1,2)$.

   a) Bestäm ekvationen för planet $\mathcal{P}$ genom A, B och C samt arean av triangeln med dessa tre hörn. (3p)

   b) Beräkna avståndet mellan punkten D och planet $\mathcal{P}$. (1.5p)

   c) Bestäm skärningspunkten mellan $\mathcal{P}$ och linjen genom D och E. (1.5p)

   (Obs! Om du inte kan göra del (a) men vill ändå visa att du vet hur man gör (b) och (c), så kan du välja ditt egna valfria plan $\mathcal{Q}$ och arbeta med den i stället).

Var god vänd!

3. a) Formulera extremvärdesatsen för kontinuerliga funktioner. (2p)

   b) Bestäm det största och minsta värdet som antas av funktionen $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ då $x \in [\frac{1}{2}, 10]$. (4p)

4. Skissera grafen till funktionen (6p)

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}.$$

   Ange alla asymptoter och lokala extrempunkter. Konkavitet/konvexitet behöver ej utredas !

5. En triangel ABC har ett hörn i punkten $A = (0, 1)$. De andra två hörnen B och C ligger på kurvan $y = x^2$. Vad är den maximala arean för triangeln då sträckan BC ligger mellan A och x-axeln och är parallell med denna ? (6p)

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

   a) För alla vinklar $\theta \in \mathbb{R}$ gäller $(\sin\theta)(\cos\theta) \leq \frac{1}{2}$.

   b) En deriverbar funktion är kontinuerlig.

   c) Om funktionen $f(x)$ är både begränsad och deriverbar så är $f'(x)$ också begränsad.

   (Obs! En funktion $f(x)$ sägs vara *begränsad* om det finns ett positivt reellt tal C sådan att $|f(x)| < C$ för alla $x \in \mathbb{R}$).

   d) Om $f'(x) > 1$ för alla $x \in \mathbb{R}$ så är $f(x)$ inverterbar och $(f^{-1})'(x) < 1$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

   e) Ekvationen $\cos x = x$ har exakt två lösningar då $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

   f) För alla vektorer $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ gäller att $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{b}$.

7. a) Låt $f(x)$ vara en funktion som är definierad på en öppen intervall (a, b). Definiera vad som menas med att $f(x)$ är *strängt växande* på (a, b). (2p)

   b) Bevisa att om $f(x)$ är deriverbar på (a, b) med en överallt strängt positiv derivata, så är $f(x)$ strängt växande på (a, b). (4p)

Lycka till!
/Peadar