MATEMATIK
Chalmers

Tentamen i Inledande matematik för Z1, (TMV120)
Tid: 2012-08-29, kl 08.30 - 12.30
Hjälpmedel: Inga, ej heller miniräknare.
Telefonvakt: Magnus Önnheim, tel 0703-088304

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.
Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.
(Bonuspoäng från hösten 2011 inkluderas.)
Lösningar läggs ut på kursens webbsida efter skrivningstidens slut.
Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Angående granskning, se kursens hemsida www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv120/1112/

---

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.

   a) Förenkla (2p)
   $$\frac{18^{21} \cdot 60^{18}}{30^{18} \cdot 9^{15} \cdot 2^{39} \cdot 3^{11}}$$
   så långt som möjligt.

   b) Låt $f(x) = \tan x$. Bestäm $f^{-1}(1)$ om denna storhet existerar. (2p)

   c) För vilka reella tal a saknar ekvationssystemet (2p)
   $$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & a & 6 \end{array}\right)$$
   lösning?

   d) För vilka reella tal x gäller det att (2p)
   $$\sin\left|\frac{x+5}{3-x}\right| \geq 2\cos\frac{\pi}{6} \ ?$$

   e) Derivera $f(x) = e^{\sin^2 x}$. (2p)

   f) Avgör om följande gränsvärden existerar och beräkna dem i så fall: (4p)
   $$i) \ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}, \quad ii) \ \lim_{x\to -\infty}\frac{2x+\sin x}{x-2\ln|x|}, \quad iii) \ \lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^2}.$$

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar.

2. a) Bestäm ekvationen för planet Π som är ortogonalt mot planet $x + y - z = 2$ och innehåller linjen genom punkterna $(1, 0, -1)$ och $(0, 1, 1)$. (3p)

   b) Bestäm en parameterframställning av linjen ℓ, som går genom punkten $(1, 2, 1)$ och är ortogonal mot $x + y - z = 2$. (1p)

   c) Var skär linjen ℓ planet Π? (2p)

Var god vänd!

MATEMATIK
Chalmers

---

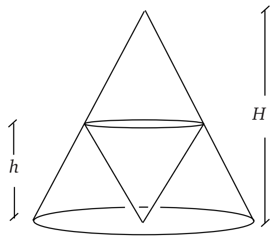
3. Bestäm värdemängd till funktionen $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x} - \arctan x$. (6p)

4. Rita grafen till funktionen (6p)

$$f(x) = \frac{x^2+5}{x+2}.$$

Ange speciellt funktionens definitionsmängd och värdemängd, eventuella lokala extrempunkter och asymptoter. (Du behöver inte utreda konvexitet/konkavitet).

5. En rät cirkulär kon (alltså en 'vanlig kon') med höjden h är inskriven i en större cirkulär kon med höjden H så att spetsen på de lilla konen vilar mot centrum av basen på den stora. Visa att den lilla konens volym blir maximal då $h = \frac{H}{3}$. (Volymen av en kon ges av (basens area)$\times$ höjden / 3.) (6p)



6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

   a) Om z är ett komplext tal sådant att $|z - 2 + i| < \sqrt{5}$, så är $|z| < 2\sqrt{5}$.
   b) Det finns ingen funktion som är deriverbar i $x = 2$, utan att vara kontinuerlig där.
   c) $\arccos(\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{3}$.
   d) Låt $f(x) = \begin{cases} \sin^2 x \sin\frac{1}{x} & \text{då} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{då} \quad x = 0 \end{cases}$. Då gäller att $f'(0) = 0$.
   e) För $x > 0$ gäller $1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$.
   f) Låt $a < b$. Funktionen $f(x) = \frac{1}{(x-a)^4} + \frac{1}{(x-b)^9}$ saknar då nollställe i intervallet (a, b).

7. Visa att om $f'(x) > 0$ i ett intervall I, så är f strängt växande där. (6p)

Jan Alve