MATEMATIK
Chalmers

Tentamen i Inledande matematik för Z1, (TMV121)
Tid: 2012-10-27, kl 08.30 - 12.30
Hjälpmedel: Inga, ej heller miniräknare.
Telefonvakt: Oskar Hamlet, tel 0703-088304

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.
Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.
(Bonuspoäng från hösten 2012 inkluderas.)
Lösningar läggs ut på kursens webbsida efter skrivningstidens slut.
Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället.
Angående lösningar och granskning, se kursens hemsida
www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv121/1213/

---

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.
Glöm inte att det i vissa uppgifter är lätt att kontrollera svaret!

   a) Bestäm alla lösningar till ekvationssystemet (2p)

$$\begin{cases} x - y - z = 1 \\ -x + 2y + 2z = 0 \\ 3x - y - z = 5 \end{cases}$$

   b) Ange två vektorer som inte är parallella med varandra och som (dessutom) båda är vinkelräta mot vektorn $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$. (2p)

   c) Ange en av lösningarna till ekvationen $z^2 = -8i$, svara på formen $a+bi$ utan att använda trigonometriska uttryck. (2p)

   d) Ange det eller de öppna intervall där funktionen $f(x) = xe^{-x}$ är *konvex* (Adams: *concave up*). (2p)

   e) Beräkna för funktionen $f(x) = \dfrac{e^x + 2x - 1}{2e^x + x - 2}$ följande gränsvärden: (3p)

$$\text{(i)} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) \quad \text{(ii)} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) \quad \text{(iii)} \quad \lim_{x\to 0} f(x)$$

   f) Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan $2y^4 + x^3 = x^2y^3$ i punkten $(-1, 1)$. (2p)

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar.

2. a) En rät linje går genom punkten $(2, -3, 4)$ och är vinkelrät mot planet med ekvationen $3x + 6y + 2z = 0$. Bestäm linjens ekvationer, **både** i parameterform och i parameterfri form. (3p)

   b) Bestäm avståndet mellan linjen i (a) och punkten $(3, -2, 4)$. (3p)

Var god vänd!

MATEMATIK
Chalmers

---

3. Bestäm värdemängden för funktionen $f(x) = \dfrac{x^2+2x+7}{x^2+4}$. (6p)

4. Rita grafen till funktionen $f(x) = \arctan 3x - \arctan x$. Ange också alla eventuella lokala extrempunkter och asymptoter. (Du behöver inte utreda konvexitet/konkavitet). (6p)

5. Utred för vilket eller vilka värden på det reella talet k har ekvationen $e^{2x} = k\sqrt{x}$ *exakt en* lösning? Motivera väl! (6p)

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

   a) Om f är en strängt växande funktion definierad för alla reella tal, så måste $f(x) \to \infty$ då $x \to \infty$.
   b) Funktionen $f(x) = 2\ln x - \ln(x+1)$ är strängt växande på intervallet $(0, \infty)$.
   c) Det finns strängt avtagande funktioner som är konvexa (Adams: concave up).
   d) Grafen till funktionen $f(x) = \log_2 x$ har en tangentlinje som går genom origo.
   e) Om två vektorer är vinkelräta mot varandra så måste deras kryssprodukt vara nollvektorn.
   f) Om det komplexa talet z_0 är lösning till ekvationen $z^n = 1$, så är $\bar{z}_0 = z_0^{n-1}$.

7. a) Skriv det gränsvärde som definierar *derivatan* av en funktion f i en punkt x. (2p)
   b) Bevisa med derivatans definition att $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$. (3p)
   De gränsvärden som ingår i detta bevis behöver inte bevisas.
   c) Bevisa att $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$. (2p)

/JAS