MATEMATIK
Chalmers

Tentamen i Inledande matematik för Z1, (TMV121)
Tid: 2013-08-28, kl 08.30 - 12.30
Hjälpmedel: Inga, ej heller miniräknare.
Telefonvakt: Anders Martinsson, tel 0703-088304

---

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.
Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.
(Bonuspoäng från hösten 2012 inkluderas.)
Lösningar läggs ut på kursens webbsida senast 29/8.
Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället.
Angående lösningar och granskning, se kursens hemsida
www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv121/1213/

---

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.
   Glöm inte att det i vissa uppgifter är lätt att kontrollera svaret!

   a) För vilka reella tal $x$ gäller det att $x < x^2 + 1$? (2p)

   b) För vilket eller vilka värden på $a$ är vektorn med koordinater $(1, a, 2)$ vinkelrät mot vektorn $(1, 2, 3) \times (1, a, 2)$? (2p)

   c) Bestäm konstanterna $a$ och $b$ så att ekvationssystemet (2p)
   $\left\{\begin{array}{rcrcl} 2x & + & 3y & = & 1 \\ x & + & ay & = & b \end{array}\right.$ får oändligt många lösningar?

   d) Bestäm $f'(\frac{1}{2})$ då $f(x) = \cos(\arctan 2x)$. (2p)

   e) Bestäm alla lösningar till ekvationen $z^3 = e^{\frac{2\pi i}{3}} + e^{\frac{4\pi i}{3}}$ (2p)

   f) Beräkna $\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}} - \frac{1}{x^2}\right)$ (2p)

**Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar**.

2. a) Bestäm en ekvation för det plan som innehåller båda linjerna (4p)
   $(x, y, z) = (4 - t, 5 + t, 2t)$ och $(x, y, z) = (4 + t, 5 - 2t, t)$.

   b) Bestäm konstanten $a$ så att de två linjerna (4p)
   $(x, y, z) = (4 - t, 5 + t, 2t)$ och $(x, y, z) = (at, 1 + 2t, 2 - t)$
   skär varandra och ange skärningspunkten.

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = e^{\left(\frac{1}{1-x^2}\right)}$. (6p)
   Ange alla eventuella lokala extrempunkter och asymptoter.
   Du behöver inte utreda var kurvan är konvex/konkav.

**Var god vänd!**

MATEMATIK
Chalmers

---

4. Visa att funktionen $f(t) = \dfrac{\tan t}{2 + \tan^2 t}$ har ett största och ett minsta värde i intervallet $[0, \dfrac{\pi}{2})$, och beräkna dessa värden. (6p)

5. Låt $f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{x} & \text{om} \quad x < 0 \\ e^{-x^2} & \text{om} \quad x \geq 0 \end{cases}$ (6p)

   a) Visa att $f$ är inverterbar.

   b) Bestäm inversens definitionsmängd och värdemängd.

   c) Ange funktionsuttrycket $f^{-1}(x)$.

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

   a) Om $\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{v} = 0$ så är $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \bullet (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = |\boldsymbol{u}|^2 |\boldsymbol{v}|^2$.

   b) Varje ekvationssystem med fler ekvationer än obekanta saknar lösning.

   c) Om $f, g$ är deriverbara funktioner sådan att $f(x) < g(x)$ för alla $x \in \mathbf{R}$ så kan det aldrig vara så att $f'(x) > g'(x)$ för alla $x \in \mathbf{R}$.

   d) Funktionen $f(x) = x^3 \ln(1 + x^2)$ är inverterbar.

   e) Om $z_1$ och $z_2$ är två komplexa tal sådana att $|z_1 - z_2| = |z_1 + z_2|$, så gäller att $|z_1| = |z_2|$.

   f) Om en funktion är kontinuerlig på intervallet $[0, 1]$, så har har den ett lokalt extremvärde där.

7. Ange derivatan till funktionen $f(x) = \ln x$ och bevisa ditt påstående. (6p)

/JAS