Asymptoter i $\pm\infty$.

Funktionen $f(x)$ har asymptoten $y = kx + m$ i ∞ $(-\infty)$ om

$$f(x) - (kx + m) \to 0, \text{ när } x \to \infty \ (-\infty).$$

För att $f(x)$ ska ha en asymptot i ∞ $(-\infty)$ krävs att $f(x)$ är definierad för alla tillräckligt stora (små) värden på x, dvs i en omgivning till ∞ $(-\infty)$.
Om $f(x)$ har asymptoten $y = kx + m$ i ∞ $(-\infty)$ gällera att

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad \left(k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}\right) \tag{1}$$

$$m = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) \qquad (m = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - kx)) \tag{2}$$

Detta ger följande metod för att bestämma eventuell asymptot i ∞:

1. Bestäm $k = \lim_{x\to\infty} f(x)/x$. Om gränsvärdet inte existerar saknas asymptot i ∞.
2. Om k finns, bestäm $m = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx)$. Om gränsvärdet existerar är $y = kx + m$ en asymptot till $f(x)$ i ∞, annars saknas sån asymptot.

Om man undersöker eventuell asymptot i $-\infty$ låter man istället x gå mot $-\infty$ i gränsvärdena ovan.
OBS! Om man vet att $f(x) \to L$, där L är en konstant, när $x \to \infty$ $(-\infty)$ behöver man inte undersöka grämsvärdena ovan eftersom k och m i detta fall är $k = 0$ och $m = L$, så att $y = L$ är en asymptot i ∞ $(-\infty)$.
När $k = 0$ talar man om *vågrät* (eller horisontell) asymptot, när $k \neq 0$ om *sned.*

Lodräta asymptoter

Funktionen $f(x)$ har den lodräta asymptoten $x = a$ om $f(x) \to \pm\infty$, när $x \to a^+$, eller när $x \to a^-$.
För att $x = a$ ska kunna vara en lodrät asymptot till $f(x)$ krävs att $f(x)$ är definierad i en (höger- eller vänster-)omgivning till a, utom möjligen i just a, dvs i en punkterad (höger- eller vänster-)omgivning till a.
Om $f(x)$ är kontinuerlig kan $x = a$ bara vara en asymptot när a är en randpunkt till definitionsmängden och inte ingår i den.
Det ger följande metod för **kontinuerliga** funktioner:

1. Bestäm punkter som är randpunkter till definitionsmängden men som inte ingår iden (dvs $f(x)$ är definierad i en (höger- eller vänster-)omgivning till punkten, men inte i själva punkten).
2. För en sådan punkt a gäller att $x = a$ är en asymptot om minst ett av gränsvärden

   $$\lim_{x\to a^-} f(x), \quad \lim_{x\to a^+} f(x)$$

   existerar och är oegentligt (dvs är ∞ eller $-\infty$).