

Standard gränsvärden med logaritm, polynom och exponentialfunktion

Vi ska jämföra funktioner av tre typer, logaritm, potensfunktion, och exponentialfunktion, när alla är strängt växande då x är tillräckligt stort.

Potensfunktionen $f(x) = x^a$ är strängt avtagande för positiva x om $a < 0$ och strängt växande om $a > 0$. I allmänhet är x^a bara definierat när $x > 0$, men för vissa rationella tal a är x^a definierat för alla reella tal x . Det gäller t.ex. när a är ett positivt heltal, eller $1/n$ där n ett udda heltal. För $a > 0$ är $0^a = 0$.

Exponentialfunktionen e^{kx} är strängt växande om $k > 0$ och strängt avtagande om $k < 0$.

Vi ska se att en strängt växande exponentialfunktion dominerar över varje strängt växande potensfunktion som i sin tur dominerar över $\ln x$, när $x \rightarrow \infty$.

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

Bevis: $Q = (\ln x)/x$ ger ett gränsvärde av typen " ∞/∞ " när $x \rightarrow \infty$, så vi prövar med att använda l'Hospitals regel. Derivering av täljare och nämnare för sig ger kvoten

$$Q_1 = \frac{1/x}{1},$$

som har gränsvärdet 0 när $x \rightarrow \infty$. l'Hospitals regel ger att även Q har detta gränsvärde. \square

- Om $a > 0$ (så att x^a är strängt växande för positiva x) gäller att

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0.$$

Bevis: Om skrivning ger

$$\frac{\ln x}{x^a} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\ln x^a}{x^a} \rightarrow \frac{1}{a} \cdot 0 = 0,$$

när $x \rightarrow \infty$, eftersom $x^a \rightarrow \infty$ då.

Vi har därmed sett att en växande potensfunktion dominerar över $\ln x$, när $x \rightarrow \infty$.

- Om $a > 0$ (så att x^a är strängt växande för positiva x) och $b > 0$ (så att e^{bx} är strängt växande) gäller att

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^a}{e^{bx}} = 0.$$

Bevis: Vi sätter $x = \ln t$ och har att $x \rightarrow \infty$ då motsvaras av att $t \rightarrow \infty$. Vi får

$$\frac{x^a}{e^{bx}} = \left(\frac{\ln t}{t^{b/a}} \right)^a,$$

som $\rightarrow 0^a = 0$, då $x \rightarrow \infty$, eftersom $b/a > 0$. \square

Vi har därmed sett att en strängt växande exponentialfunktion dominerar över en strängt växande potensfunktion, när $x \rightarrow \infty$.

Standard gränsvärden med logaritm, polynom och exponentialfunktion

- För $a > 0$ (så att $x^a \rightarrow 0^+$, när $x \rightarrow 0^+$) gäller att

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^a \ln x = 0.$$

OBS: $x^a \rightarrow 0$ och $\ln x \rightarrow -\infty$, när $x \rightarrow 0^+$, så gränsvärdet är av typen "(-)0 · ∞".

Bevis: Sätter vi $x = 1/t$ har vi

$$x^a \ln x = \frac{1}{t^a} \cdot \ln \left(\frac{1}{t} \right) = -\frac{\ln t}{t^a}.$$

$x \rightarrow 0^+$ motsvarar att $t \rightarrow \infty$, vilket ger att gränsvärdet av uttrycket är 0, enligt beräkning i andra punkten ovan. \square