Kompletteringar till MVE012

J A S, HT 2018

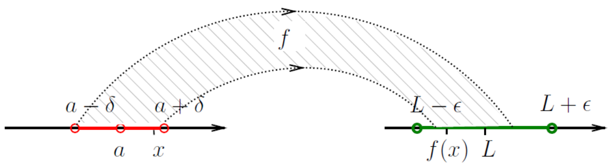
1 Gränsvärden

En *omgivning* till talet a på tallinjen är ett symmetriskt öppet intervall runt a. En sån är av formen $(a-\delta,\, a+\delta)$, för nåt positivt tal δ. Att ett tal x ligger i denna omgivning till a kan skrivas $|x-a|<\delta$.

En *punkterad omgivning* till a är en omgivning till a, utom punkten a själv. En sån är är alltså av formen $(a-\delta,\, a)\cup(a,\, a+\delta)$, för nåt positivt tal δ. Att ett tal ligger i denna punkterade omgivning kan skriva $0<|x-a|<\delta$.

Definition 1.1 (Gränsvärde) *Funktionen f har gränsvärdet L när $x\to a$, om det till varje omgivning till L finns en punkterad omgivning till a, så att $f(x)$ ligger i omgivningen till L, för varje x i den punkterade omgivningen till a. Detta skrivs då*

$$\lim_{x\to a} f(x) = L.$$



Givet $\epsilon>0$, ska det finnas $\delta>0$, så att ...

Definitionen ovan är matematiskt korrekt, men lämpar sig ibland minder bra när man ska bevisa satser om gränsvärden. En mer "operationell" formulering av definitionen är:

Definition 1.2 (Gränsvärde) *Funktionen f har gränsvärdet L när $x\to a$, om det till varje $\epsilon>0$ finns ett $\delta>0$, så att*

$$|f(x)-L|<\epsilon \text{ för alla } x \text{ såna att } 0<|x-a|<\delta.$$

Detta skrivs då

$$\lim_{x\to a} f(x) = L,$$

eller

$$f(x)\to L \text{ när } x\to a.$$

De två definitionerna är ekvivalenta (likvärdiga) eftersom varje omgivning till L bestäms av (precis) ett $\epsilon>0$ och varje puntkerad omgivning till a bestäms av (precis) ett $\delta>0$.

Av definitionen framgår att f måste vara definierad i en punkterad omgvining till a för att kunna ha ett gränsvärde när $x\to a$. Funktionen f kan, men behöver inte, vara definierad i a för att kunna ha ett gränsvärde när $x\to a$. Om f är definierad i a spelar funktionens värde i a ingen roll för eventuellt gränsvärde, eftersom definitionen av gränsvärde använder punkterade omgivningar till a.

En funktion f (definierad i en punkterad omgivning tilll a) kan sakna gränsvärde när $x\to a$. Inget värde på L uppfyller då villkoret i definitionen.

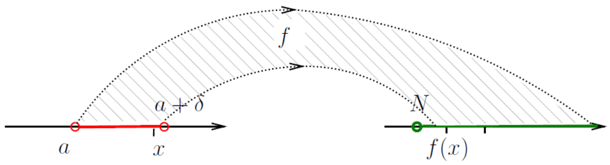
Ett sätt att tänka på gränsvärdet av f när $x\to a$, är att det är ett värde man har anledning förvänta sig att $f(x)$ ska ha när $x=a$, med tanke på f:s värden när $x\neq a$. Att gränsvärdet inte finns kan då förstås som att det inte finns anledning att förvänta sig nåt särskilt värde av f i a baserat på f:s värden när $x\neq a$.

En *omgivning till* ∞ är ett intervall av formen (N, ∞), där N är ett tal. Att x ligger i denna omgivning till ∞ är samma sak som att $N < x$.

En punkterad högeromgivning till talet a är ett intervall av formen $(a,\ a+\delta)$, för nåt tal $\delta > 0$. Att x ligger i denna omgivning till a är samma sak som att $a < x < a + \delta$.

Definition 1.3 (Oegentligt gränsvärde) *Funktionen f har (det oegentliga) gränsvärdet ∞ när $x \to a^+$, om det till varje omgivning till ∞ finns en punkterad högeromgivning till a, så att $f(x)$ ligger i omgivningen till ∞, för varje x högeromgivningen till a. Detta skrivs då*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty.$$



Givet $N > 0$, ska det finnas $\delta > 0$, så att ...

En version av detta som är mer behändig när man ska bevisa egenskaper hos oegentliga gränsvärden är

Definition 1.4 (Oegentligt gränsvärde) *Funktionen f har gränsvärdet ∞ när $x \to a^+$, om det till varje N finns ett $\delta > 0$, så att*

$$N < f(x) \text{ för alla } x \text{ såna att } a < x < a + \delta.$$

Detta skrivs då

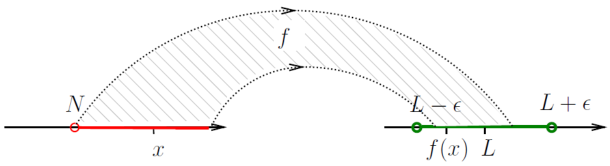
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty,$$

eller

$$f(x) \to \infty \text{ när } x \to a^+.$$

Definition 1.5 (Gränsvärde när $x \to \infty$) *Funktionen f har gränsvärdet L när $x \to \infty$, om det till varje omgivning till L finns en omgivning till ∞, så att $f(x)$ ligger i omgivningen till L, för varje x i omgivningen till ∞. Detta skrivs då*

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L.$$



Givet $\epsilon > 0$, ska det finnas $N > 0$, så att ...

En version av detta som är mer behändig när man ska bevisa egenskaper hos oegentliga gränsvärden är

Definition 1.6 (Gränsvärde när $x \to \infty$) *Funktionen f har gränsvärdet L när $x \to \infty$, om det till varje $\epsilon > 0$ finns ett N, så att*

$$|f(x) - L| < \epsilon \text{ för alla } x \text{ såna att } N < x.$$

Detta skrivs då

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L,$$

eller

$$f(x) \to L \text{ när } x \to \infty.$$

Sats 1.1 (Triangelolikheten) *Om a och b är två reella tal, så gäller att*

$$|a + b| \le |a| + |b|.$$

Bevis För varje rellt tal c gäller att $c \leq |c|$ och att $|-c| = |c|$. Om $a + b < 0$ har vi

$$|a + b| = -(a + b) = -a + (-b) \leq |-a| + |-b| = |a| + |b|.$$

Om $a + b \geq 0$ har vi

$$|a + b| = a + b \leq |a| + |b.$$

Oavsett vilket gäller altså påståendet i satsen. ■

Sats 1.2 ★ *Antag att* $\lim_{x \to a} f(x) = L$ *och att* $\lim_{x \to a} g(x) = M$. *Då gäller att* $\lim_{x \to a}(f(x) + g(x)) = L + M$.

En alternativ formulering är:

$$f(x) + g(x) \to L + M \text{ när } x \to a, \text{ om } f(x) \to L \text{ och } g(x) \to M \text{ när } x \to a.$$

Bevis Det gäller att visa att det för givet $\epsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ så att

$$|f(x) + g(x) - (L + M)| < \epsilon \text{ för alla } x \text{ såna att } 0 < |x - a| < \delta.$$

Enligt förutsättning gäller att $\lim_{x \to a} f(x) = L$, vilket ger att det till $\epsilon/2$ (förklaringen till valet av $\epsilon/2$ kommer på slutet) finns ett $\delta_1 > 0$, så att

$$|f(x) - L| < \epsilon/2 \text{ för alla } x \text{ såna att } 0 < |x - a| < \delta_1. \tag{1}$$

Enligt förutsättning gäller också att $\lim_{x \to a} g(x) = M$, vilket ger att det till $\epsilon/2$ finns ett $\delta_2 > 0$, så att

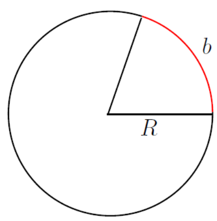
$$|g(x) - M| < \epsilon/2 \text{ för alla } x \text{ såna att } 0 < |x - a| < \delta_2. \tag{2}$$

Sätt nu δ till det minsta av de två talen δ_1 och δ_2. Om då $0 < |x - a| < \delta$, så gäller också att $0 < |x - a| < \delta_1$ och att $0 < |x - a| < \delta_2$. Från triangelolikheten tillsammans med (1) och (2) får vi därför att om $0 < |x - a| < \delta$ så gäller att

$$|f(x) + g(x) - (L + M)| = |(f(x) - L) + (g(x) - M)| < |f(x) - L| + |g(x) - M| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon. \tag{3}$$

■

I beviset av nästa sats förutsätts att man vet hur man beräknar arean av en cirkelsektor som i figuren.



Radien i cirkeln är R och den röda bågen har längden b. Hela cirkelns area är πR^2 och omkresten är $2\pi R$. Sektorns andel av hela cirkelns area är samma som bågens andel av hela omkretsen, dvs $b/(2\pi R)$. Sektorns area är därför

$$\frac{b}{2\pi R} \cdot \pi R^2 = \frac{bR}{2}.$$

Lägg märke till likheten med formeln för en triangels area.

Sats 1.3 ★ *Det gäller att*

$$\frac{\sin x}{x} \to 1 \text{ } när \text{ } x \to 0$$

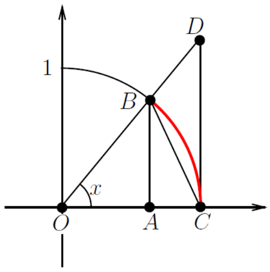
eller, med andra beteckningar,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Beviset utnyttjar insläningsregeln för gränsvärden. Det gäller att stänga in $\sin(x)/x$ mellan två uttryck som har båda har gränsvärdet 1, när $x \to 0$. Instängingarna hittas med ett geometriskt argument.

Bevis Antag först att $0 < x < \pi/2$. Figuren nedan illusterar en del av enhetscirkeln och vinkeln x. Den röda bågen har längden x.

I figuren finns en mindre triangel OCB, med area $\sin(x)/2$, en större cirkelsektor med area $x/2$ och en ännu större triangel OCD med area $\tan(x)/2$. Jämförelse mellan areor ger olikheterna



$$\sin x < x < \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}. \tag{4}$$

Den första av dessa ger, eftersom $x > 0$, att

$$\frac{\sin x}{x} < 1.$$

Den andra ger, eftersom $\cos x > 0$ när $0 < x < \pi/2$, att

$$\cos x < \frac{\sin x}{x}.$$

Tillsammans ger detta

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1,$$

när $0 < x < \pi/2$. När $-\pi/2 < x < 0$ gäller att $0 < -x < \pi/2$ och, enligt vad som nyss visats, att

$$\cos(-x) < \frac{\sin(-x)}{-x} < 1.$$

Men $\cos(-x) = \cos x$ och $\sin(-x) = -\sin x$, så

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

även när $-\pi/2 < x < 0$.

Eftersom $\cos x \to 1$ när $x \to 0$, ger instängningsregeln att

$$\frac{\sin x}{x} \to 1 \text{ när } x \to 0.$$

■

2 Derivata

Definition 2.1 *Om funktionen f är definierad i en omgivning till a, så är den* deriverbar *i a om* differenskvoten i a

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

har ett gränsvärde när $x \to a$. Om gränsvärdet exiterar (dvs om f är deriverbar i a) kallas det för f:s derivata *i a och betecknas $f'(a)$. Man har alltså då*

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Om man sätter $x = a + h$ i differenskvoten blir den

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

och att $x \to a$, motsvaras då av $h \to 0$. Denna variant är ibland mer behändig.

Lägg märket till att en funktion måste vara definierad i en punkt där den är deriverbar.

Definition 2.2 *En funktion f är* deriverabar *om den är deriverbar i varje punkt i sin definitionsmängd. Derivatan f' till f ges då av*

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{x}$$

och är en funktion med samma definitionsmängd som f.

Ibland inträffar det att det (eller de) uttryck som definierar f' har större naturlig definitionsmängd än vad f har. Det betyder då inte att f' har den större definitionsmängden; f' kan bara vara definierad där f är definierad.

Sats 2.1 (★ Derivata och kontinuitet) *Om f är deriverbar i a, så är f kontinuerlig i a.*

Det följer att om f är deriverbar (i varje punkt i definitionsmängden), så är f kontinuerlig (i varje punkt i definitionsmängden).

Bevis

Det gäller att visa att $f(x) \to f(a)$, när $x \to a$.

Eftersom f är deriverbar a har differenskvoten $(f(x) - f(a))/(x - a)$ ett gränsvärde när $x \to a$, som är $f'(a)$.

Omskrivning och räknerelger för gränsvärden ger(när $x \neq a$) att

$$f(x) = (x - a) \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + f(a) \to 0 \cdot f'(a) + f(a) = f(a)$$

när $x \to a$.

■

Sats 2.2 (★ Derivata av sinus) *Funktionen $f(x) = \sin x$ är deriverbar och $f'(x) = \cos x$.*

Bevis

Det gäller att visa att differenskvoten

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

har ett gränsvärde när $h \to 0$ och att det är $\cos x$.

Med additionsformeln för sinus blir täljaren

$$\sin(x+h) - \sin x = \cos x \sin h + \sin x \cos h - \sin x = \cos x \sin h + \sin x(\cos h - 1).$$

Differenskvoten blir därför

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x \cdot \frac{\sin h}{h} + \sin x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} \tag{5}$$

Ett känt gränsvärde är att $\sin(h)/h \to 1$. Formeln för cosinus av dubbla vinkeln, $\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$, ger med $\alpha = h/2$ att

$$\frac{\cos h - 1}{h} = -\sin(h/2) \cdot \frac{\sin(h/2)}{h/2} \to -0 \cdot 1 = 0$$

när $h \to 0$.

Nu följer i (5) att

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \to \cos x \cdot 1 + \sin x \cdot 0 = \cos x.$$

■

2.1 Deriveringsregler

Sats 2.3 *Om funktionerna f och g är deriverbara och c och d är konstanter, så gäller att kombinationen $cf + dg$ är deriverbar och*

$$(cf(x) + dg(x))' = cf'(x) + dg'(x).$$

Bevis

Differenskvoten för $cf(x) + dg(x)$ är

$$\frac{cf(x+h) + dg(x+h) - (cf(x) + dg(x))}{h} = c \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + d \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Enligt förutsättning är f och g deriverbara så $(f(x+h) - f(x))/h \to f'(x)$ och $(g(x+h) - g(x))/h \to g'(x)$ när $h \to 0$.

Räkneregeler för gränsvärden ger nu

$$\frac{cf(x+h) + dg(x+h) - (cf(x) + dg(x))}{h} \to cf'(x) + dg'(x).$$

Det innebär att $cf(x) + dg(x)$ är deriverbar med derivata $cf'(x) + dg'(x)$.

■

Sats 2.4 (★ Produktregeln) *Om funktionerna f och g är deriverbara, så gäller att produkten fg är deriverbar och*

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Bevis

Differenskvoten för $f(x)g(x)$ är

$$\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}.$$

Täljaren kan skrivas

$$\begin{aligned} &f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x) = \\ &\qquad = (f(x+h) - f(x))g(x+h) + f(x)(g(x+h) - g(x)). \end{aligned}$$

Vilket ger

$$\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Eftersom g är deriverbar enligt förutsättning gäller att g är kontinuerlig, så $g(x+h) \to g(x)$ när $h \to 0$. Samma förutsättning ger att $(g(x+h) - g(x))/h \to g'(x)$ när $h \to 0$. Även f är deriverbar enligt förutsättning, så $(f(x+h) - f(x))/h \to f'(x)$ när $h \to 0$.

Räkneregeler för gränsvärden ger nu

$$\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \to f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

när $h \to 0$. Det innebär att $f(x)g(x)$ är deriverbar med derivata $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

■

Sats 2.5 *Om funktionen g är deriverbar så är funktionen $1/g$ deriverbar och*

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}.$$

Observera att g och $1/g$ kan ha olika definitionsmängd; $1/g$ är bara definierad när g är definierad och är $\neq 0$.

Bevis

Differenskvoten för $1/g$ är

$$\frac{1/g(x+h) - 1/g(x)}{h} = \frac{g(x) - g(x+h)}{hg(x)g(x+h)} = -\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \cdot \frac{1}{g(x)} \cdot \frac{1}{g(x+h)}.$$

Eftersom g är deriverbar, så är g kontinuerlig, vilket ger att $g(x+h) \to g(x)$, när $h \to 0$. Samma förutsättning ger att $(g(x+h) - g(x))/h$ har ett gränsvärde (som är $g'(x)$) när $h \to 0$.

Räkneregler ger nu att

$$\frac{1/g(x+h) - 1/g(x)}{h} \to -g'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \cdot \frac{1}{g(x)} = -\frac{g'(x)}{g(x)^2},$$

när $h \to 0$. Det betyder att $1/g$ är deriverbar med derivata $-g'(x)/g(x)^2$. ■

Sats 2.5 tillsammans med produktregeln ger

Sats 2.6 (Kvotregeln) *Om funktionerna f och g är deriverbara, så är kvoten f/g deriverbar och*

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

Bevis

Enligt sats 2.5 ger förutsättningarna att $1/g$ är deriverbar med derivata $-g'(x)/g(x)^2$. Produktregeln ger därför

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right)' = f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \frac{-g'(x)}{g(x)^2} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

3 Allmän funktionslära

3.1 Medelvärdessatsen

Sats 3.1 *Antag att funktionen f har ett* lokalt maximum eller minimun *i en* inre punkt c *i definitionsmängden (så att f är definierad i en omgivning till c). Om f är deriverbar i c, så gäller att*

$$f'(c) = 0.$$

Bevis

Eftersom f är deriverbar i c vet vi att f:s differenskvot i c

$$Q = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

har ett gränsvärde (som betecknas $f'(c)$) när $x \to c$.

Om f har ett lokalt maximum i c gäller att $f(x) \leq f(c)$ för alla x i en omgivning till c. Detta ger att $f(x) - f(c) \leq 0$ för alla x i omgivningen. När $x < c$ gäller att $x - c < 0$, så då gäller för differenskvoten av f i c att

$$Q = \frac{f(x) - f(x)}{x - c} \geq 0.$$

Detta ger att $\lim_{x \to c^-} Q \leq 0$. När $x > c$ gäller att $x - c > 0$, så då gäller

$$Q = \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0.$$

Detta ger att $\lim_{x \to c^+} Q \leq 0$.

Eftersom $f'(x) = \lim_{x \to c} Q = \lim_{x \to c^-} Q = \lim_{x \to c^+} Q$ får vi

$$0 \leq f'(c) \leq 0, \text{ så } f'(c) = 0.$$

Beviset i fallet när f har ett lokalt minimum bevisas på liknande sätt.

■

Sats 3.2 (Rolles sats) *Antag att funktionen f är kontinuerlig på intervallet $[a, b]$ och deriverbar på (a, b). Om då $f(a) = f(b)$, så gäller att det finns ett tal $c \in (a, b)$ så att $f'(c) = 0$.*

Bevis

Eftersom f är kontinuerlig på det slutna begränsade intervallet $[a, b]$ gäller enligt sats att f antar ett minsta och ett största värde m respektive M på intervallet.

En möjlighet är att $m = M$. Då är f konstant på intervallet och $f'(c) = 0$ för varje $c \in (a, b)$.

Annars gäller, eftersom $f(a) = f(b)$, att minst ett av m eller M antas i en punkt $c \in (a, b)$. Eftersom f är deriverbar i c gäller därför enligt sats 3.1 att $f'(c) = 0$.

■

Sats 3.3 (★ Medelvärdessatsen) *Antag att funktionen f är kontinuerlig på intervallet $[a, b]$ och deriverbar på (a, b). Då finns ett $c \in (a, b)$, så att*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Beviset använder ett trick. Man hittar en annan funktion än f, som man kan använda Rolles sats på. Funktionen är vald så att resultatet i satsen då faller ut.

Bevis

Sätt

$$g(x) = (f(x) - f(a))(b - a) - (f(b) - f(a))(x - a).$$

Då är g kontinuerlig på $[a, b]$ och deriverbar på (a, b), eftersom både f och $x - a$ har dessa egenskaper. Dessutom gäller att $g(a) = g(b) = 0$. Enligt Rolles sats gäller därför att

$$g'(c) = 0 \text{ för nåt } c \in (a, b).$$

Deriveringsregler ger att

$$g'(x) = f'(x)(b - a) - (f(b) - f(a)),$$

så

$$0 = g'(c) = f'(c)(b - a) - (f(b) - f(a)), \text{ eller } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

■

Med bara ett uns mer ansträngning (och ett trick i samma anda) kan man visa en mer generell version av Medelvärdessatsen, som ibland är användbar.

Sats 3.4 (Generaliserade Medelvärdessatsen) *Antag att funktionerna f och g är kontinuerliga på $[a, b]$ och deriverbara på (a, b). Om då $g'(x) \neq 0$ på (a, b) gäller att det finns ett $c \in (a, b)$, så att*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Om man använder denna sats med funktionen $g(x) = x$, så får man den vanliga Medelvärdessatsen.

Den vanliga Medelvärdessatsen använd på g ger att $g(b) - g(a) = g'(c)(b - a)$, för nåt $c \in (a, b)$. Eftersom det förutsätts att $g'(x) \neq 0$ på (a, b) betyder det att $g(b) - g(a) \neq 0$, så det är ingen risk att dela med detta uttryck.

Bevis

Sätt

$$h(x) = (f(x) - f(a))(g(b) - g(a)) - (f(a) - f(b))(g(x) - g(a)).$$

Då är h kontinuerlig på $[a, b]$ och deriverbar på (a, b), eftersom f och g har dessa egenskaper. Dessutom gäller att $h(a) = h(b) = 0$. Enligt Rolles sats finns därför ett $c \in (a, b)$, så att $h'(c) = 0$.

Deriveringsregler ger

$$h'(x) = f'(x)(g(b) - g(a)) - (f(a) - f(b))g'(x),$$

så

$$0 = h'(c) = f'(c)(g(a) - g(b)) - (f(a) - f(b))g'(c) \text{ eller } \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

■

3.2 Konsekvenser av Medelvärdessatsen

Sats 3.5 ★ *Antag att funktionen f är kontinuerlig på intervallet $[a, b]$ och deriverbar på (a, b). Då gäller att f är konstant på $[a, b]$ precis när $f'(x) = 0$, för alla $x \in (a, b)$.*

Om $f'(x) = 0$ för alla $x \in (a, b)$ säger man oftast att $f'(x)$ är *identiskt* 0 på (a, b). Det skrivs ibland $f \equiv 0$.

Satsen innehåller två delar. Den ena är att om f är konstant på intervallet, så är derivatan identiskt 0. Det vet vi redan! Den andra är att om f' är identiskt 0 på (a, b), så är f konstant på (det lite större intervallet) $[a, b]$.

Bevis

Antag först att f är konstant på $[a, b]$. Enligt deriveringsregler är då $f'(x) = 0$ för alla $x \in (a, b)$.

Antag nu (i stället) att $f'(x) = 0$ för alla $x \in (a, b)$. Tag ett godtyckligt $x \in (a, b]$. Då gäller att f är kontinuerlig på intervallet $[a, x]$ och deriverbar på (a, x). Enligt medelvärdes satsen finns därför ett $c \in (a, x)$, så att $f'(c) = f(a) - f(x)$.

Enligt förutsättning är $f'(c) = 0$, så $f(a) = f(x)$. Eftersom $x \in (a, b]$ var godtyckligt gäller därför att $f(x) = f(a)$ för alla $x \in [a, b]$. Det betyder att f är konstant på $[a, b]$.

■

Sats 3.6 (★ Derivatans tecken och växande/avtagande) *Antag att funktionen f är kontinuerlig på $[a, b]$ och deriverbar på (a, b). Då gäller att*

1. *f är strängt växande på $[a, b]$ om $f'(x) > 0$, för alla $x \in [a, b]$.*
2. *f är växande på $[a, b]$ om $f'(x) \geq 0$, för alla $x \in [a, b]$.*
3. *f är avtagande på $[a, b]$ om $f'(x) \leq 0$, för alla $x \in [a, b]$.*
4. *f är strängt avtagnade på $[a, b]$ om $f'(x) < 0$, för alla $x \in [a, b]$.*

Lägg märket till att man i satsen inte behöver veta nåt om derivatan i a och b (om de skulle existera). För funktionen $f(x) = x^3$ gäller t.ex att den (speciellt) är kontinuerlig på $[0, 1]$ och deriverbar på $(0, 1)$, där $f'(x) = 3x^2$ är postiv. Alltså är den strängt växande på $[0, 1]$. På samma sätt ser man att den är strängt växande på $[-1, 0]$ och därför strängt växande på $[-1, 1]$. Att $f'(0) = 0$ spelar alltså ingen roll. På samma sätt kan man dra slutsaten att en funktion är strängt växande på ett intervall om f' är positiv, utom möjligen i enstaka punkter.

Bevis

Tag *godtyckligt* $x_1 < x_2$ in $[a,\, b]$. Förutsättningarna ger att f är kontinuerlig på $[x_1,\, x_2]$ och deriverbar på $(x_1,\ x_2)$. Medelvärdessatsen ger ett tal $c \in (x_1,\, x_2)$, så att

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \text{ dvs } f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1). \tag{6}$$

Vi genomför bevisen för de olika varianterna.

1. Det gäller här att visa att $f(x_1) < f(x_2)$. Enligt förutsättning är $f'(c) > 0$ och $x_2 > x_1$, så $x_2 - x_1 > 0$. Enligt 6 ger detta $f(x_2) - f(x_1) > 0$, eller $f(x_1) < f(x_2)$.
2. Det gäller här att visa att $f(x_1) \leq f(x_2)$. Enligt förutsättning är $f'(c) \geq 0$ och $x_2 > x_1$, så $x_2 - x_1 > 0$. Enligt 6 ger detta $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, eller $f(x_1) \leq f(x_2)$.
3. Det gäller här att visa att $f(x_1) \geq f(x_2)$. Enligt förutsättning är $f'(c) \leq 0$ och $x_2 > x_1$, så $x_2 - x_1 > 0$. Enligt 6 ger detta $f(x_2) - f(x_1) \leq 0$, eller $f(x_1) \geq f(x_2)$.
4. Det gäller här att visa att $f(x_1) > f(x_2)$. Enligt förutsättning är $f'(c) < 0$ och $x_2 > x_1$, så $x_2 - x_1 > 0$. Enligt 6 ger detta $f(x_2) - f(x_1) < 0$, eller $f(x_1) > f(x_2)$.

■