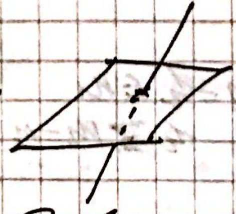
1. 

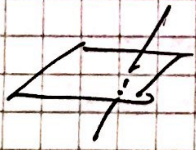
Söker parameterframst. av linjen

$t = \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{3}$ $\begin{cases} x = -1+2t \\ y = 3+4t \\ z = 3t. \end{cases}$

Bestämma t så att $(-1+2t,\ 3+4t,\ 3t)$ ligger i planet (dvs löser planets ekvation). Ska ha

$3(-1+2t) - 3(3+4t) + 2\cdot 3t = 5$, $\quad -12 + 0t = 5$.

Inget värde på t löser ekvation. Ger att linjen inte skär planet. Svar Skärningspunkt saknas

2. 

Parameterframst. av linjen söks:

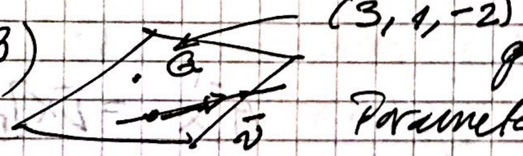
$t = \frac{x-7}{5} = y-4 = \frac{z-5}{4}$, $\begin{cases} x = 7+5t \\ y = 4+t \\ z = 5+4t \end{cases}$

Bestämmer t så att $(7+5t, 4+t, 5+4t)$ löser planets ekvation:

$3(7+5t) - (4+t) + 2(5+4t) = 5$, $\quad 27 + 22t = 5$

$\underline{t = -1}$ Det ger punkten $(7-5, 4-1, 5-4) = (2, 3, 1)$

Svar $(2,3,1)$

3) 

Söker riktningsvektor $\bar{v}$ för linjen och punkt P på den

Parameterframst. av linjen

$t = \frac{x-4}{5} = \frac{y+3}{2} = z$ $\begin{cases} x = 4+5t \\ y = -3+2t \\ z = t \end{cases}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{P} + t\underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\bar{v}}$.

$\bar{u} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $\bar{v}$ är vektorer i planet

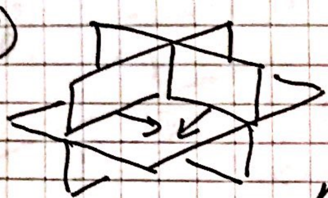
som har normal $\bar{u} \times \bar{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -(-9) \\ 22 \end{pmatrix}$

Det ger att planet har ekv.

$-8x + 9y + 22z = d$, Går genom $(4, -3, 0)$, så

$-32 - 27 + 0 = d$, $\quad d = -59$

Svar $-8x + 9y + 22z = -59$, eller $8x - 9y - 22z = 59$

4) 

Normal till $2x-y+5z+3=0$ är $\bar{n}_1 \begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix}$

$x+3y-z=7$ är $\bar{n}_2 \begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}$

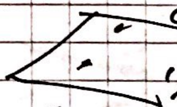
$$n_1 \times n_2 = \begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-14\\-(-7)\\7\end{pmatrix} = -7\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

Ger att $\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$ normal till sökta planet som därför har ekvation $2x-y-z=d$. Det går genom $(0,0,0)$ så $0-0-0=d$, $d=0$ Svar $2x-y-z=0$

5) Avståndet från (x,y,z) med till det plan som har ekvation $ax+by+cz+d=0$ (viktigt med noll i ena ledet!) ges av

$$\frac{|ax+by+cz+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Söker planets ekvation



$C=(1,1,0)$

Normal genom

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-(-2)\\1\end{pmatrix}$$

$A=(0,1,1)$ $B=(1,0,2)$ Som ger att planet har ekvationen $x+2y+z+d=0$.

Det går genom $(0,1,1)$ så $d=-3$.

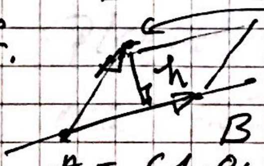
Avst. mellan $(1,-2,3)$ är därför

$$\frac{|1-4+3-3|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$ Svar $\frac{\sqrt{6}}{2}$

6) Avståndsformel (se 5)) ger att svaret är

$$\frac{|7\cdot 1-4(-2)+4\cdot 3-3|}{\sqrt{49+16+16}} = \frac{24}{\sqrt{81}} = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}$$

Svar $\frac{8}{3}$

7. 

$C=(2,3,-1)$ $B=(3,1,2)$ $A=(1,0,1)$

Area av parallellogram

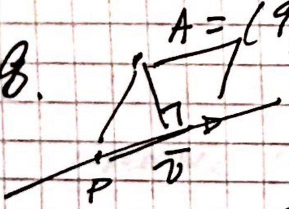
$h\cdot|\vec{AB}| = |\vec{AB}\times\vec{AC}|$

$\vec{AB} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{AC} = \begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$, $|\vec{AB}\times\vec{AC}| = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\5\\5\end{pmatrix}$

$= 5\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$. Vi får $h\sqrt{4+1+1} = 5\sqrt{1+1+1}$

$$h = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$ Svar $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

8.



Söker riktningsvektor $\bar v$ för linjen och punkt P på den.

Parameterframställning: $t=\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-4}{2}$

$$\begin{cases} x=2+3t \\ y=-3+4t \\ z=4+2t \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\\ -3\\ 4\end{pmatrix}+t\underbrace{\begin{pmatrix} 3\\ 4\\ 2\end{pmatrix}}_{\bar v}$$

Vi har (se 7) $\quad h|\bar v| = |\bar v\times \vec{PA}|$

$$\bar v\times\vec{PA} = \begin{pmatrix} 3\\ 4\\ 2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 7\\ 1\\ 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\\ -(-8)\\ -25\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\\ 8\\ -25\end{pmatrix}$$

$|\bar v| = \sqrt{9+16+4}=\sqrt{29}$, $\qquad 25^2=(20+5)^2 = 400+200+25$

$|\bar v\times\vec{PA}| = \sqrt{36+64+625}=\sqrt{725} =$

$= \sqrt{25\cdot 29}$, För $h=\frac{5\sqrt{29}}{\sqrt{29}}=5$

Svar 5

9.

Avst. mellan två linjer är samma som avst. mellan punkt (val fri) och ~~planet genom~~ på ena linjen och planet genom den andra parallellt med den första linjen.

Bestämma planet genom $(1,9,7)=A$ och $(-1,6,11)=B$ som är parallellt med
$\frac{x-1}{2}=-\frac{y+3}{2}=z-4$. Söker parameterframst. av den senare: $t=\frac{x-1}{2}=-\left(\frac{y+3}{2}\right)=z-4$

$$\begin{cases} x=1+2t \\ y=-3-2t \\ z=4+t \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix} 1\\ -3\\ 4\end{pmatrix}}_{P}+t\underbrace{\begin{pmatrix} 2\\ -2\\ 1\end{pmatrix}}_{\bar v}$$

Planet innehåller vektorerna $\vec{AB}$ och $\bar v$ och har därför normal

$$\vec{AB}\times\bar v = \begin{pmatrix} -2\\ -3\\ 4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 2\\ -2\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\\ -(-10)\\ 10\end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 1\\ 2\\ 2\end{pmatrix}$$

Ekvation för planet $\quad x+2y+2z+d=0$

Går genom $(-1,6,11)$ så $-1+12+22+d=0$, $d=-33$

$P=(1,-3,4)$, punkt på andra linje, har avst.

$$\frac{|1-6+8-33|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{30}{3}=10 \qquad \text{Svar } 10$$

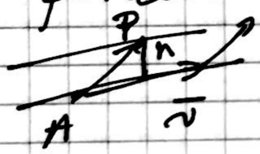
10. Avståndet är samma som avståndet
mellan (valfri) punkt på $\frac{x-1}{4} = -\frac{y}{3}$, $z=1$
och planet som går genom $(3,6,1)=A$, innehåller
vektor $\bar{v} = \begin{pmatrix}4\\-3\\0\end{pmatrix}$ och är parallell med
första linjen. Skriv parameterframställning
av den $t = \frac{x-1}{4} = -\frac{y}{3}$, $z=$

$$\begin{cases} x = 1+4t \\ y = -3t \\ z = 1 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}_{P} + t\underbrace{\begin{pmatrix}4\\-3\\0\end{pmatrix}}_{\bar{n}}$$

$\bar{n}, \bar{v}$ vektorer i sökta planet.

Vi har $\bar{n}\times\bar{v} = \begin{pmatrix}4\\-3\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\-3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

Detta ger att de båda linjerna är parallella. Då är avståndet samma som avståndet mellan valfri punkt på ena och den andra linjen



Vi har $h|\bar{v}| = |\vec{AP}\times\bar{v}|$

$|\bar{v}| = \sqrt{16+9+0} = 5$

$\vec{AP}\times\bar{v} = \begin{pmatrix}-2\\-6\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\-3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\30\end{pmatrix} = 30\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Och $h = \frac{|\vec{AP}\times\bar{v}|}{|\bar{v}|} = \frac{30}{5} = 6$

Svar 6.