1. Beräkna $(f^{-1})'(x)$ om $f(x) = 1+2x^3$

a) Bestämma formel för $f^{-1}(y)$ (går i detta fall)

$f^{-1}(y)$ är det x som löser

$$y = f(x) = 1+2x^3$$

$$\frac{y-1}{2} = x^3$$

$$\left(\frac{y-1}{2}\right)^{1/3} = x = f^{-1}(y), \quad \text{så } f^{-1}(x) = \left(\frac{x-1}{2}\right)^{1/3}$$

b) derivera $f^{-1}(x)$:

$$D(f^{-1}(x)) = \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{-2/3} \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{6}\left(\frac{2}{x-1}\right)^{2/3}}}$$

2. Beräkna $(f^{-1})'(2)$ (b) om $f(x) = \frac{4x^3}{x^2+1}$ och visa att $f(x)$ är inverterbar. (a)

a) En strängt växande / avtagande funktion är inverterbar. Prövar om nåt av det gäller för $f(x)$, med $f'(x)$

Har $$f'(x) = \frac{12x^2(x^2+1) - 4x^3 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$$

$f'(x) >$ på $(0,\infty)$ och på $(-\infty,0)$

så strängt växande på $[0,\infty)$, $[-\infty,0]$

ger att $f(x)$ strängt växande

b) Har $f^{-1}(f(x)) \equiv x$, som deriveras till

$$(f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) \equiv 1$$

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Sökt x så att $2 = f(x) = \frac{4x^3}{x^2+1}$

ser att $x=1$ duger.

Har också att $f'(x) = \frac{4x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$

Får $$(f^{-1})'(2) = (f^{-1})'(f(1)) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{2^2}{4 \cdot 4} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

~~8.~~ Beräkna $f^{-1}(x)$ om $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

4. Använd $D_{f^{-1}} = V_f$ och $V_{f^{-1}} = D_f$.

a) Här gäller $D_f = \mathbb{R} = V_{f^{-1}}$

$y = V_f$ precis när $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ har lösning x

Vi ser att y och x har samma tecken.

För $\sqrt{x^2+1}\, y = x$ kvadrerar (falska lösningar!)

$$(x^2+1)y^2 = x^2$$

$$y^2 = x^2(1-y^2)$$

$$\frac{y^2}{1-y^2} = x^2, \quad x = \pm \frac{|y|}{\sqrt{1-y^2}} =$$

$$= \{x, y \text{ samma tecken}\} =$$

$$\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Detta fungerar precis när $-1 < y < 1$.

$V_f = (-1, 1) = D_{f^{-1}}$

Här $f^{-1}(y)$ är lösningen x till $y = f(x)$,

som vi sett ges $x = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} = f^{-1}(y)$.

b) Dvs $f^{-1}(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. som vi deriverar:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1 \cdot \sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{1-x^2+x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}$$

3. Beräkna $(f^{-1})'(-2)$ om $f(x) = x\sqrt{3+x^2}$.

Har $f^{-1}(f(x)) \equiv x$. Deriverar:

$(f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) \equiv 1 \qquad (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$

Löser $-2 = f(x) = x\sqrt{3+x^2}$ och ser att $x = -1$ duger, dvs

$-2 = f(-1)$

Får $(f^{-1})'(-2) = (f^{-1})'(f(-1)) = \frac{1}{f'(-1)}$

Har $f'(x) = \sqrt{3+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{3+x^2}}$, $f'(-1) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.

Om $(f^{-1})'(-2) = \underline{\underline{\frac{2}{5}}}$.

5.) Ska lösa ut x ur

$y = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$, för $g^{-1}(y)$ är denna lösning

Får

$(1-f(x))y = 1+f(x)$ (Vill ha $f(x)$ ensamt i ett led)

$y-1 = f(x)(1+y)$

$\frac{y-1}{y+1} = f(x)$. Tar f^{-1} av båda leden.

$f^{-1}\left(\frac{y-1}{y+1}\right) = f^{-1}(f(x)) = x = g^{-1}(y)$

Ger att $\underline{\underline{g^{-1}(x) = f^{-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}}$