Tent med mat för I1

MVE012 5 jan -15

Svar eller lösningar

(1)

a) -1024

b) Alla $x < -3$

c) $(x, y, z) = (2, 0, -1)$

d) $\pi/3$

e) $v = n\pi$ eller $v = \frac{3\pi}{4} + n\pi$

där n är ett godt heltal

f) $2, 1, e$

(2)

a) Lös $\begin{cases} 1+t = 2-s \\ 1-t = s \\ 2t = 2 \end{cases}$ ger $t = 1, s = 0$

så $(2,0,2)$ är skärningspunkt

b) En normal till planet är

$(1,-1,2) \times (1,-1,0) = (2,2,0)$

Eftersom planet innehåller punkten $(2,0,2)$

blir en ekvation $x + y = 2$

③ $y = \dfrac{e^{-x}}{x-2}$ definierad för alla $x \neq 2$

$y' = \dfrac{e^{-x}(1-x)}{(x-2)^2}$

Gränsvärden:

$x \to -\infty \Rightarrow y \to -\infty$

$x \to 2^- \Rightarrow y \to -\infty$

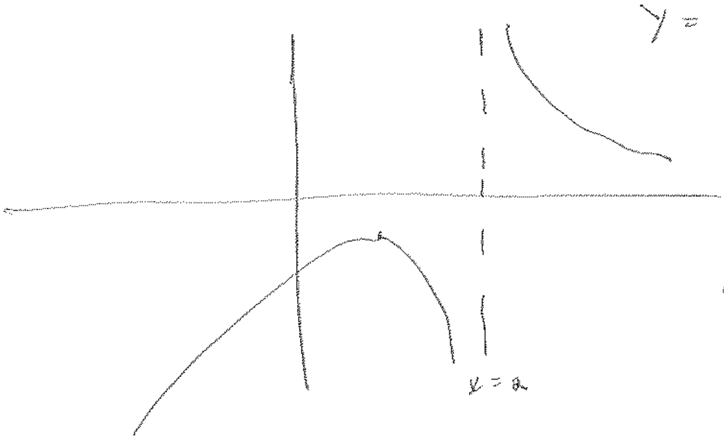
$x \to 2^+ \Rightarrow y \to \infty$

$x \to \infty \Rightarrow y \to 0$

Teckentabell

x		1		2	
y'	$+\ +$	0	$-\ -\ -$	ξ	$-\ -\ -\ -$
y	$\nearrow$	$-1/e$	$\searrow$	$-\infty/+\infty$	$\searrow$

$y = \dfrac{e^{-x}}{x-2}$



Asymptote: $x=2,\ y=0$

④

Sätt $f(x) = \ln(1+x^2) + 2\arctan\frac{1}{x}$

$f(x)$ definierad för alla $x \neq 0$

och $f'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2} - \dfrac{2}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{2(x-1)}{1+x^2}$

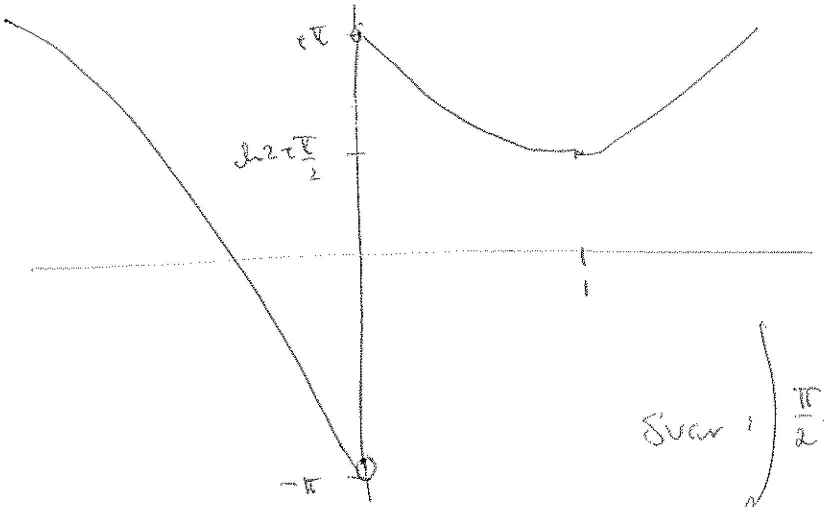
$x \to \pm\infty \Rightarrow f(x) \to \infty$

$x \to 0^- \Rightarrow f(x) \to -\pi$

$x \to 0^+ \Rightarrow f(x) \to +\pi$ och $f(1) = \ln 2 + \frac{\pi}{2}$

Teckentabell

x		0		1	
f'	$- - -$	$\nexists$	$- -$	0	$+ + +$
f	$\searrow$	$-\pi / +\pi$	$\searrow$	$\ln 2 + \frac{\pi}{2}$	$\nearrow$



Svar:

$a \geq \pi$ 2 lösningar

$\frac{\pi}{2} + \ln 2 < a < \pi$ 3 lösningar

$a = \frac{\pi}{2} + \ln 2$ 2 lösningar

$-\pi < a < \frac{\pi}{2} + \ln 2$ 1 lösning

$a \leq -\pi$ ingen lösning

---

(5)

$$f(x) = \begin{cases} e^{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}, & x < 0 \\ \arctan x - \frac{\pi}{2}, & x \geq 0 \end{cases}$$

För $x < 0$ avtar $f(x)$ mot 0. $0 < y < 1$

För $x \geq 0$ växer $f(x)$ från $-\frac{\pi}{2}$ till 0: $-\frac{\pi}{2} \leq y < 0$

Av detta följer att $f(x)$ är inverterbar

För derivatan har vi $f^{-1\,\prime}(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$

där $y = f(x)$; Lös först $f(x) = \dfrac{1}{2}$

dvs $e^{-\frac{1}{x^2}} = \dfrac{1}{2}$ dvs $x = \dfrac{-1}{\sqrt{\ln 2}}$ $(x < 0)$

$f'(x) = \dfrac{2}{x^3} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$ så $f^{-1\,\prime}\left(\dfrac{1}{2}\right) = -(\ln 2)^{-\frac{3}{2}}$

(6)

a) F t.ex $p(x) = x^4 + 1$

b) S två vektorer är $(1,1,-2)$ och $(3,1,2)$ vars skalärprodukt är $= 0$

c) S $f'(x) = 0$ för alla $x \neq 0$ så $f(x)$ är konstant i intervallen $(-\infty, 0)$ och $(0, \infty)$

Vi har $f(1) = \dfrac{\pi}{2}$, $f(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$

(7)

b) om $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ är $p(1) = \sum_{k=0}^{n} a_k$

Så $x-1$ är en faktor i $p(x) \Leftrightarrow p(1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k = 0$