Lösningsförslag 2016-01-05

1a, Skriv om $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ på polär form!

$\Rightarrow \quad 1/2 + i\cdot\sqrt{3}/2 = \{\text{enhetscirkeln}\} = \cos\frac{\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{\pi}{3}$

Använd nu de Moivres formel enl.

$$\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{21} = \left(\cos\frac{\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right)^{21} = \cos\left(\frac{21\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{21\pi}{3}\right) =$$

$$= \cos(7\pi)+i\sin(7\pi) = \cos(\pi)+i\sin(\pi) = \underline{\underline{-1}}$$

Svar: -1.

1b, $y=\frac{1-2x}{1+x} \Leftrightarrow y(1+x) = 1-2x \Leftrightarrow y-1 = -x\cdot(y+2)$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = \frac{1-y}{2+y}}}$

Svar: $f^{-1}(x) = \frac{1-x}{2+x}$.

1c, $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{(4+3)\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = \{\text{additionsformeln}\} =$

$= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}}$

Svar: $\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

1d, $\log_2(x)-\log_2(x+3) = 1 \Leftrightarrow \log_2\left(\frac{x}{x+3}\right) = 1$

$\Leftrightarrow \frac{x}{x+3} = 2 \Leftrightarrow x = 2x+6 \Leftrightarrow -x = 6 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=-6}}$

Men $\log_2(-6)$ är ej definierat och ekv. saknar därmed lösning!

Svar: Lösning saknas.

1e, $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x+4}-\sqrt{4-x}} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot(\sqrt{x+4}+\sqrt{4-x})}{(\sqrt{x+4}-\sqrt{4-x})(\sqrt{x+4}+\sqrt{4-x})} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot(\sqrt{x+4}+\sqrt{4-x})}{x+4-(4-x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}\cdot(\sqrt{x+4}+\sqrt{4-x})}{2\cancel{x}} = \frac{2+2}{2} = \underline{\underline{2}}$

Svar: 2.

1f, Ett exempel är funktionen $f(x) = \arctan(x)$.
Svar: $\arctan(x)$.

2a, $A=(1,2,3)$, $B=(-2,3,0)$, $C=(5,0,-1)$.
Följande vektorer ligger i planet:

$\overrightarrow{AB} = (-2,3,0)-(1,2,3) = (-3,1,-3)$

$\overrightarrow{AC} = (5,0,-1)-(1,2,3) = (4,-2,-4)$

Vi får därför en normalvektor genom kryssprodukten

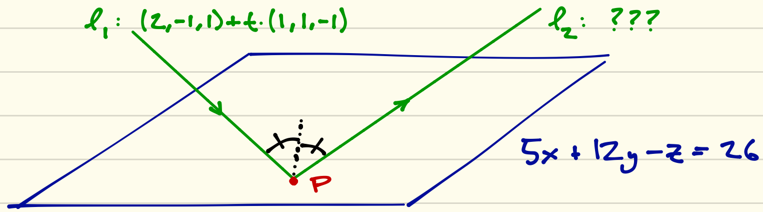
$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & -4 \end{vmatrix} = (-10,-24,2)$$

och vi kan ta $\mathbf{n} = (5,12,-1)$. Kan därför skriva planets ekv. som $5x+12y-z = D$ där talet D fås genom insättning av t.ex. punkten A

$\Rightarrow 5\cdot 1 + 12\cdot 2 - 1\cdot 3 = 5+24-3 = 26 = D$

Svar: Planets ekv. kan skrivas $5x+12y-z = 26$.

2b, Situationen kan illustreras enligt bilden nedan.



Riktningsvektorn för linjen ℓ_1 är $\mathbf{v}_1 = (1,1,-1)$. Vi kan också bestämma reflektionspunkten P genom insättning av ℓ_1 i planets ekvation:

$$5\cdot(2+t)+12\cdot(-1+t)-(1-t) = 10+5t-12+12t-1+t = -3+18t = 26$$
$$\Longleftrightarrow t = \frac{29}{18}.$$

$$\Rightarrow P = \left(2+\frac{29}{18}, -1+\frac{29}{18}, 1-\frac{29}{18}\right) = \left(\frac{65}{18}, \frac{11}{18}, -\frac{11}{18}\right)$$

För att beräkna den reflekterade strålens riktningsvektor $\mathbf{v}_2$ måste vi komposantuppdela $\mathbf{v}_1$ enl. $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_v$ där
$\mathbf{v}_p$ = komposant parallell med planet och
$\mathbf{v}_v$ = vinkelrät mot planet.
Då gäller nämligen att $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_p - \mathbf{v}_v$.

Men $\mathbf{v}_v$ är precis vektorproj. av $\mathbf{v}_1$ på $\mathbf{n}$ så:

$$\mathbf{v}_v = \frac{\mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{n}}{\mathbf{n} \bullet \mathbf{n}} \cdot \mathbf{n} = \frac{(1,1,-1)\bullet(5,12,-1)}{(5,12,-1)\bullet(5,12,-1)}\cdot(5,12,-1) =$$

$$= \frac{18}{170}\cdot(5,12,-1) = \frac{9}{85}(5,12,-1) = \left(\frac{45}{85}, \frac{108}{85}, -\frac{9}{85}\right).$$

Vektorn v_p fås nu enkelt som

$$v_p = v_1 - v_v = (1,1,-1) - \left(\frac{45}{85}, \frac{108}{85}, -\frac{9}{85}\right) = \left(\frac{40}{85}, -\frac{23}{85}, -\frac{76}{85}\right)$$

och vi får $v_2 = v_p - v_v = \left(\frac{40}{85}, -\frac{23}{85}, -\frac{76}{85}\right) - \left(\frac{45}{85}, \frac{108}{85}, -\frac{9}{85}\right) =$

$$= \left(-\frac{5}{85}, -\frac{131}{85}, -\frac{67}{85}\right).$$

Den reflekterade strålens ekvation blir därför:

$$\ell_2 : \left(\frac{65}{18}, \frac{11}{18}, -\frac{11}{18}\right) + t \cdot \left(-\frac{5}{85}, -\frac{131}{85}, -\frac{67}{85}\right). \qquad \square$$

3, Börja med att hitta den funktion som beskriver förhållandet mellan arean A och vinkeln β.
Det gäller att

$$A = a \cdot 2 \cdot a \sin\frac{\beta}{2} + a\sin\frac{\beta}{2} \cdot a\cos\frac{\beta}{2} = \left\{ \sin\beta = 2\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2} \right\} =$$
$$= 2a^2 \sin\frac{\beta}{2} + \frac{a^2}{2}\sin\beta$$

$$\Rightarrow A' = a^2\cos\frac{\beta}{2} + \frac{a^2}{2}\cos\beta = \left\{ \cos\beta = 2\cos^2\frac{\beta}{2} - 1 \right\} =$$

$$= a^2\cos^2\frac{\beta}{2} + a^2\cos\frac{\beta}{2} - \frac{a^2}{2}.$$

Sätt $z = \cos\frac{\beta}{2}$ och sök efter kritiska punkter!

$$A' = 0 \iff a^2 z^2 + a^2 z - \frac{a^2}{2} = 0 \iff z^2 + z - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad z = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vi vet att $0 \leq \beta \leq \pi$ så $0 \leq \cos\frac{\beta}{2} \leq 1$ och därmed är endast lösningen $z = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ av intresse. Det gäller att

$$\cos\frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \Leftrightarrow \beta = 2\arctan\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$$

Är detta ett globalt maximum? Kolla A''!

$$A'' = -\frac{a^2}{2}\sin\frac{\beta}{2} - \frac{a^2}{2}\sin\beta < 0 \text{ för alla } 0 \leq \beta \leq \pi.$$

Alltså är funktionen $A(\beta)$ konkav med en kritisk punkt : $\beta = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ som därmed är en maxpunkt.

<u>Svar</u>: Arean blir maximal då $\beta = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

4, (i) Def. mängden ges av $D_f = (0,1) \cup (1,\infty)$

(ii) Inga symmetrier av typen jämn/udda eftersom funktionen inte är def. för negativa x.

(iii) Skärningar

y-axeln: $f(0)$ ej def. så funktionen skär ej y-axeln.

x-axeln: $y = 0 \Rightarrow 0 = \frac{x}{\ln(x)} \Leftrightarrow x = 0 \notin D_f$ så ingen skärning med x-axeln.

(iv) Derivatan: $f'(x) = \dfrac{1 \cdot \ln(x) - x \cdot \frac{1}{x}}{\ln(x)^2} = \dfrac{\ln(x) - 1}{\ln(x)^2}$

De kritiska punkterna uppfyller alltså $\ln(x)-1=0 \iff x=e$.
Alltså bara <u>en</u> kritisk punkt där $f(e)=\frac{e}{\ln(e)}=e$.

<u>Teckenstudium:</u>

x		1		e	
f	$\searrow$	?	$\searrow$	e min	$\nearrow$
f'	$-$	?	$-$	0	$+$

(v) Horisontella asymptoter samt gränsv. då $x \to 0^+$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\ln(x)} = \{\text{polynom vs. log.}\} = \infty$$
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\ln(x)} = 0 \quad \left(\text{och för } f': \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)-1}{\ln(x)^2} = 0\right)$$

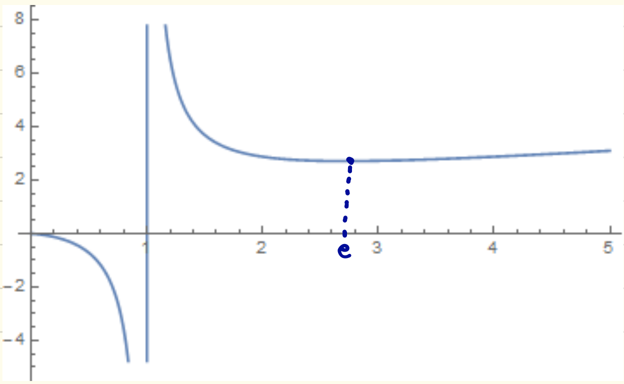
(vi) Vertikala asymptoter

Enda kandidaten är $x=1$. Det gäller att $\lim_{x\to 1^-}\frac{x}{\ln|x|} = -\infty$ och $\lim_{x\to 1^+}\frac{x}{\ln(x)} = \infty$, så en vertikal asymptot i $x=1$.

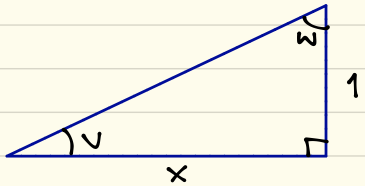
(vii) Sneda asymptoter

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\ln(x)} = 0$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) - 0\cdot x = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{\ln x} = \{\text{polynom vs. log.}\} = \infty$$

Alltså saknas sned asymptot i ∞.
Kan nu skissa grafen enl:



5, Om vi börjar med att studera fallet då $x>0$ så vet vi att både $\arctan(\frac{1}{x})$ och $\arctan(x)$ antar värden mellan 0 och $\pi/2$ och kan därmed tolkas som vinklar i rätvinkliga trianglar. Låt $v = \arctan(\frac{1}{x})$ och $w = \arctan(x)$ och betrakta följande triangel:



$$\Rightarrow \begin{cases} \tan v = \frac{1}{x} \Leftrightarrow v = \arctan(\frac{1}{x}) \\ \tan w = \frac{x}{1} \Leftrightarrow w = \arctan(x) \end{cases}$$

Men eftersom vinkelsumman i denna triangel måste vara π så gäller att $v + w + \pi/2 = \pi$ dvs.

$$\arctan(\tfrac{1}{x}) + \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$

för alla $x>0$.

Eftersom arctan är en udda funktion så gäller därför för negativa x att

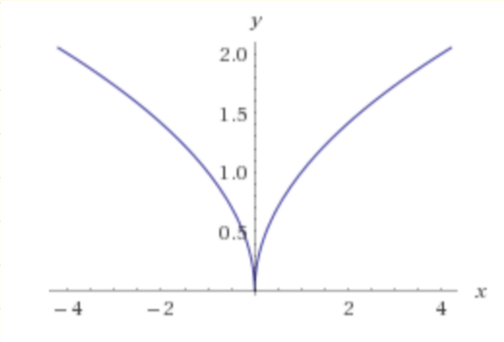
$$\arctan(\tfrac{1}{x}) + \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$$

och alltså antar funktionen bara två värden, nämligen $\pi/2$ och $-\pi/2$. Notera att funktionen inte är definierad i punkten $x=0$.

6a, Falskt! Tex. $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$.

b, Sant! $p(1) = 1-14+13+7-7-4+4 = 0$ och därför är $(x-1)$ en faktor till $p(x)$ enl. faktorsatsen.

c) Sant! Detta kan antingen motiveras grafiskt genom en enkel skiss av grafen enl. nedan (det räcker att känna till hur $f(x)=\sqrt{x}$, $x>0$ ser ut och sedan spegla i y-axeln!). Ett alternativt argument är att observera att $f(x)=\sqrt{|x|}$ är jämn samt att $\lim_{h\to 0^+} (f(h)-f(0))/h = +\infty$.



7. Se anteckningarna.