1, a,

~~Kompletteringar~~

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 2 & a & b \end{array}\right) \overset{\boxed{-2}}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4+a & b-2 \end{array}\right)$$

Saknar lösningar då $4+a=0$ och $b-2\neq 0$,

dvs. då $\underline{a=-4}$ och $\underline{b\neq 2.}$

b, $\sin 2x = \tan x \iff 2\sin x\cos x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$\iff 2\sin x\cos^2 x - \sin x = 0 \iff \sin x\cdot(2\cos^2 x - 1)$

$\iff \sin x\cdot\cos 2x = 0$

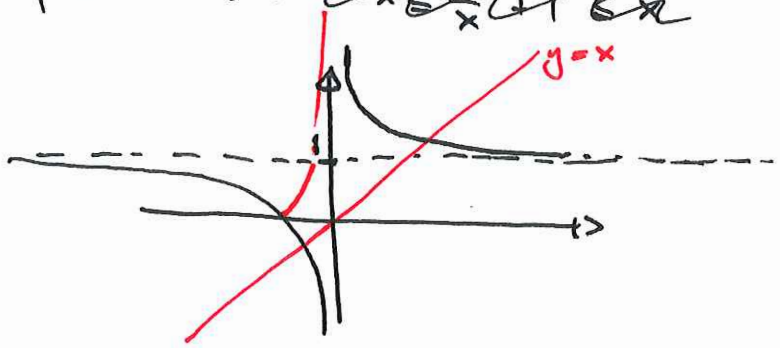
Två fall:

(i) $\sin x = 0 \iff x = n\cdot\pi,\ n\in\mathbb{Z}$

(ii) $\cos 2x = 0 \iff 2x = \frac{\pi}{2} + n\cdot\pi \iff x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\cdot n,\ n\in\mathbb{Z}$

__Svar:__ $x = n\cdot\pi$ eller $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\cdot n,\ n\in\mathbb{Z}.$

c, $\left|\frac{6}{x}+1\right| \leq x$ ~~$(x>0)$~~ ~~$\iff -x \leq \frac{6}{x}+1 \leq x$~~



$\frac{6}{x}+1 = x \iff \frac{6+x}{x} = x \iff 6+x = x^2 \iff x^2-x-6=0$

$\iff x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+6} = \frac{1}{2} (\pm)\sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{1}{2} (\pm) \frac{5}{2} \implies x = \frac{6}{2} = 3$

__Svar:__ För alla $x \geq 3.$

d) $y = \dfrac{2-3x}{x+4} \iff y\cdot(x+4) = 2-3x \iff yx + 3x = 2-4y$

$\iff x(y+3) = 2-4y \iff x = \dfrac{2-4y}{3+y}$

Svar: $f^{-1}(x) = \dfrac{2-4x}{3+x}$.

e)

(i) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{1+x^2} - x\cdot\arctan x\right) = \{x>0\} =$

$= \lim_{x\to\infty} \left(x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1} - x\arctan x\right) = \lim_{x\to\infty} \underbrace{x}_{\to\infty}\cdot\Big(\underbrace{\sqrt{1+\tfrac{1}{x^2}} - \arctan x}_{\to 1-\frac{\pi}{2}<0}\Big)$

$= -\infty$

(ii) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x} = \{\text{l'Hospital}\} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{\frac{2x}{x^2+1}}{1} =$

$= \lim_{x\to 0} \dfrac{\overset{\to 0}{2x}}{\underset{\to 1}{x^2+1}} = \text{"}\dfrac{0}{1}\text{"} = 0.$

f) $f(x) = \sqrt{(1-x)(x+5)}$

$f'(x) = \frac{1}{2}\left((1-x)(x+5)\right)^{-1/2}\cdot\left((-1)\cdot(x+5) + (1-x)\cdot 1\right) =$

$= -\dfrac{4+2x}{2\cdot\sqrt{(x-1)(x+5)}} = -\dfrac{x+1}{\sqrt{(x-1)(x+5)}}$

Tecknet styrs av faktorn $(x+1)$. Denna är "$\lessgtr 0$"

$\iff x \lessgtr -1$

Svar: $x \lessgtr -1$.

2a)

Lösning: Vet fixpunkt $(-2,0,3)$ och normalvektor $n = (2, 1, -3)$ (dvs. linjens riktningsvektor).

Planets ekv: $2\cdot x + 1\cdot y - 3\cdot z = D$.

Får D genom insättning av fixpunkt:

$$2\cdot(-2) + 1\cdot 0 - 3\cdot 3 = -4 - 9 = -13 = D$$

Svar: $2x + y - 3z = -13$

b) Sätt in linjens ekv. i planets!

$$2\cdot(2t+2) + (t-7) - 3\cdot(-3t-6) = -13$$

$$\Leftrightarrow$$

$$4t + 4 + t - 7 + 9t + 18 = -13$$

$$\Leftrightarrow$$

$$14t = -28 \Leftrightarrow t = -2$$

$$\rightsquigarrow (x,y,z) = (2\cdot(-2)+2,\ -2-7,\ -3(-2)-6) =$$
$$= (-2, -9, 0)$$

Svar: $(-2, -9, 0)$.

4,

<u>Lösning</u>: Det gäller att $\mathcal{D}_f = \{x : x \neq 0\} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Vidare är det klart att $f(x) > 0$ om $x > 0$ och $f(x) < 0$ om $x < 0$. Vad gäller i gränserna där $x \to \pm\infty$ och $x \to 0^{+-}$?

$$\lim_{x\to\pm\infty} \underbrace{e^{-x^2}}_{\to 0} \underbrace{x}_{\to\infty} \underbrace{\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}_{\to 2} = \{\text{exp. vs. polynom}\} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^{+-}} e^{-x^2}\cdot x\cdot\sqrt{4+\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^{+-}} e^{-x^2} x \sqrt{\frac{4x^2+1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^{+-}} \underbrace{e^{-x^2}}_{\to 1}\cdot \underbrace{\frac{x}{|x|}}_{\to \begin{cases}1, & \text{om } x>0\\ -1, & \text{om } x<0\end{cases}} \underbrace{\sqrt{4x^2+1}}_{\to 1} = \pm 1$$

Vad kan vi säga om $f'(x)$?

$$f'(x) = e^{-x^2}\cdot(-2x)\cdot x\cdot\sqrt{4+\frac{1}{x^2}} + e^{-x^2}\cdot 1\cdot\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}$$

$$+ e^{-x^2}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{\tfrac{1}{2}}\left(4+\frac{1}{x^2}\right)^{-1/2}\cdot(-\cancel{2})\cdot\frac{1}{x^{\cancel{3}\,2}}$$

$$= -2e^{-x^2}x^2\sqrt{4+\frac{1}{x^2}} + e^{-x^2}\sqrt{4+\frac{1}{x^2}} - \frac{e^{-x^2}}{x^2\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}$$

$$= \frac{e^{-x^2}}{x^2\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}\cdot\left[-2x^4\left(4+\frac{1}{x^2}\right) + x^2\left(4+\frac{1}{x^2}\right) - 1\right]$$

$$= \frac{e^{-x^2}}{x^2\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}\left[-8x^4 - 2x^2 + 4x^2 + 1 - 1\right]$$

$$= \frac{e^{-x^2}}{\cancel{x^2}\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}\left[-8x^{\cancel{4}\,2} + 2\cancel{x^2}\right] = 0$$

$\cancel{x^2}\left[2-8x^2\right]=0 \iff \cancel{(x=0 \notin \mathcal{D}_f)},\ x=\pm\frac{1}{2}.$

dvs. kritiska punkter i $x=\pm\frac{1}{2}$. Vad är detta för typ av punkter? (lok max/min?).

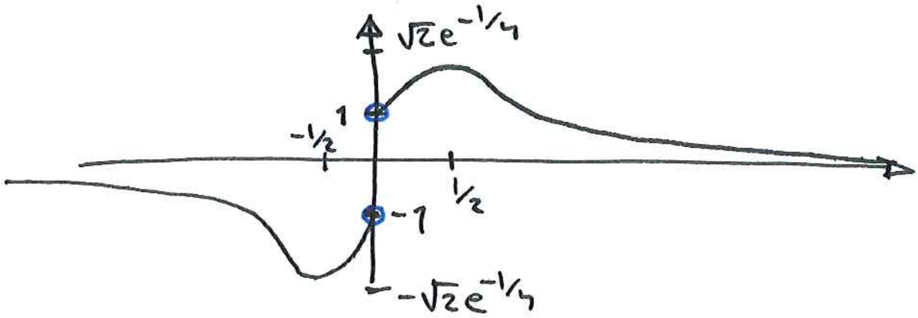
$$f'\left(\tfrac{1}{4}\right)=\frac{e^{-1/16}}{\sqrt{4+16}}\underbrace{\left(2-8\cdot\frac{1}{16}\right)}_{=2-\frac{1}{2}>0}>0$$

$$f'\left(\tfrac{3}{2}\right)=\frac{e^{-9/4}}{\sqrt{4+\frac{4}{9}}}\underbrace{\left(2-8\cdot\frac{9}{4}\right)}_{2-18<0}<0$$

$\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=e^{-1/4}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{4+4}=\sqrt{2}e^{-1/4}$ globalt max.

f udda $\Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\sqrt{2}e^{-1/4}$ globalt min.

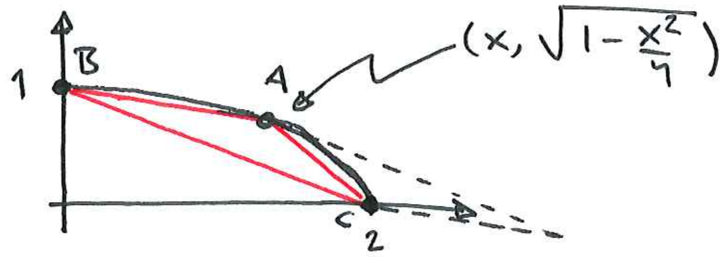
Vi har alltså:



så $\mathcal{R}_f=(-\sqrt{2}e^{-1/4},0)\cup(0,\sqrt{2}e^{-1/4})$.

5,

Lösning: Rita!



Beräkna vektorerna $\overrightarrow{BA}$ och $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{BA} = \left(x, \sqrt{1-\tfrac{x^2}{4}}\right) - (0,1) = \left(x, \sqrt{1-\tfrac{x^2}{4}} - 1\right)$$

$$\overrightarrow{BC} = (2,0) - (0,1) = (2, -1)$$

Arean av triangeln ges av

$$A = |u \times v| / 2$$

där $\quad u = \left(x, \sqrt{1-\frac{x^2}{4}} - 1, 0\right), \quad v = (2, -1, 0).$

$1 - 2\sqrt{1-\frac{1}{4}} = 1 - \sqrt{3} < 0!$

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & \sqrt{1-\frac{x^2}{4}} - 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \left(0, 0, -x - 2\sqrt{1-\tfrac{x^2}{4}} + 2\right)$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{2 - x - 2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}{2} = 1 - \frac{x}{2} - \sqrt{1-\frac{x^2}{4}} =$$

$$= 1 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$$

$$A'(x) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(4-x^2)^{-1/2} \cdot (-2x) =$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x(4-x^2)^{-1/2}$$

$$A'(x) = 0 \iff \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4-x^2} = 1$$

$$\iff x^2 = 4 - x^2 \iff 2x^2 = 4 \iff x = (\pm)\sqrt{2}$$

Av problemets natur måste detta vara en global maxpunkt.

$$A_{max} = A(\sqrt{2}) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{4-2} =$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 - \frac{2}{\sqrt{2}} = 1 - \sqrt{2} < 0 ?!?$$

Anledningen till det negativa svaret är den ordning som vi valde att göra kryssprod. $u \times v$ i. z-komponenten är i detta fallet negativ, dvs.

$$-x - 2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} + 2 < 0$$

och alltså borde vi ha satt

$$A = -\frac{2 - x - 2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}{2}.$$

Resultatet kommer bara skillja på tecken!

<u>Svar:</u> $A_{max} = \sqrt{2} - 1.$

6a, Falsk!

$$h' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$h'' = (f' \cdot g)' + (f \cdot g')' = f'' \cdot g + f' \cdot g' + f' \cdot g' + f \cdot g'' =$$
$$= f'' \cdot g + 2 f' \cdot g' + f \cdot g''.$$

b, Hitta lösningarna och kolla!

$x=1$ är en rot, ty $1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 7 = 0$, och $|1+1| = 2$

Polynom div.

$$\begin{array}{l} \quad x^2 + 4x + 7 \\ \hline x^3 + 3x^2 + 3x - 7 \quad \lfloor\ x-1 \\ -x^2 \cdot (x-1) \\ \hline \quad 4x^2 + 3x - 7 \\ \quad -4x \cdot (x-1) \\ \hline \qquad 7x - 7 \\ \qquad 7 \cdot (x-1) \\ \hline \qquad\quad 0 \end{array}$$

$\rightarrow \quad x^3 + 3x^2 + 3x - 7 = (x-1) \cdot (x^2 + 4x + 7)$

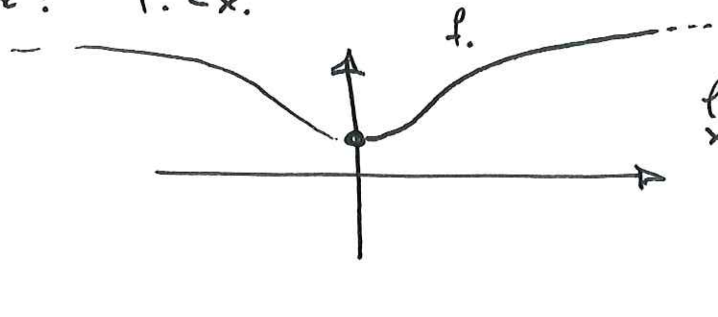
$x^2 + 4x + 7 = 0 \iff \quad x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-7} = -2 \pm i\sqrt{3}$

Det gäller att

$$|-2 \pm i\sqrt{3} + 1| = |-1 \pm i\sqrt{3}| = \sqrt{(-1)^2 + (\pm\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Alltså är påståendet sant eftersom vi har testat alla tre lösningar!

c, Falsk! T. ex.



$\lim_{x \to \infty} f(x) = 1.$

7a) Med derivatan av en funktion f i en punkt $x = a$ menas gränsvärdet

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

om det existerar. I så fall skriver man detta som $f'(a)$.

b)

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} = \lim_{x \to a} \frac{(f(x) - f(a))(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{x - a} =$$

$$= \{x = a + h,\ x \to a \Leftrightarrow h \to 0\} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(\cancel{x}a+h) - f(a)}{a+h-a} \cdot (\sqrt{a+h} + \sqrt{a}) =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot (\sqrt{a+h} + \sqrt{a}) =$$

$$= \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}_{= f'(a)} \cdot \underbrace{\lim_{h \to 0} \sqrt{a+h} + \sqrt{a}}_{= 2\sqrt{a}} = 2\sqrt{a}\, f'(a).$$