**Lösningar till MVE012 Inledande matemtik för I1, 16-12-21**

1. (a) Vi har att $f(x) = x/(1+x^2)$ är definierad för alla $x$ och att $f(x) \to 0$, när $x \to \pm\infty$. Derivering ger

$$f'(x) \quad = \quad \frac{1\cdot(x^2+1) - x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}.$$

Detta ger att $f(x)$ har (lokalt) maximum i $x = 1$ och (lokalt) minimum i $x = -1$. Eftersom $f(1) = 1/2$ och $f(-1) = -1/2$ och $f(x) \to 0$, när $x \to \pm\infty$ är största värdet $1/2$ och minsta $-1/2$.

**Svar:** Största värdet är $1/2$.

(b) Vi deriverar $f(x) = \arctan(x/\sqrt{1-x^2})$ och får enligt kedje- och kvotreglerna

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}})^2}\cdot D\Big(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\Big) = \\ &= \frac{1}{1+\frac{x^2}{1-x^2}}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}+x^2/\sqrt{1-x^2}}{1-x^2} = \\ &= \sqrt{1-x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \end{aligned}$$

**Svar:** $f'(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$.

(c) Med $f(x) = x + e^x$ har vi $f'(x) = 1 + e^x$. Det gäller att $f^{-1}(f(x)) \equiv x$, som deriveras till $(f^{-1})'(f(x))\cdot f'(x) \equiv 1$. Vi söker $x$ så att $1 = f(x) = x + e^x$ och ser att $x = 0$ duger. Eftersom $f'(0) = 2$ får vi $(f^{-1})'(1)\cdot f'(0) = (f^{-1})'(f(0))\cdot 2 = 1$.

**Svar:** $(f^{-1})'(1) = 1/2$.

(d) Systemtet har den utökade koefficientmatrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ a & a & -1 & 3a-2 \\ 1 & 2 & (a^2-1) & 4 \end{pmatrix}$$

som utsätts för radooperationer. Vi multiplicerar rad 1 med $-a$ och lägger till andra, men också med $-1$ och lägger till tredje. Resultatet är

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -a & -1 & -2 \\ 0 & 0 & (a^2-1) & 1 \end{pmatrix}.$$

Om $a \neq 0$ och $\neq \pm 1$ har vi trappstegsform utan pivotelement i sista kolonnen, vilket ger lösningar. När $a = \pm 1$ har vi trappstegsform med pivotelement i sista kolonnen, så inga lösningar. När $a = 0$ ger andra och tredje raderna ekvationerna $z = 2$ respektive $z = -1$ som är oförenliga. Inga lösningar om $a = 0$.

**Svar:** När $a = 0$, samt när $a = \pm 1$.

(e) i. Räknetregler för logaritmer och identifiering av dominerande termer ger

$$\begin{aligned} \ln(x^2+1) - 2\ln(3x+1) &= \ln\Big(\frac{x^2+1}{(3x+1)^2}\Big) = \ln\Big(\frac{1+1/x^2}{(3+1/x)^2}\Big) \to \\ &\to \ln((1+0)/(3+0)^2) = \ln(1/9) = -2\ln 3, \end{aligned}$$

när $x \to \infty$.

**Svar:** $-2\ln 3$.

ii. Vi sätter $t = 1/x$ och har att vi ska undersöka $te^{-t} = t/e^t$ när $t \to \infty$. Men det är ett känt gränsvärde som blir 0.
**Svar:** 0

iii. Gränsvärdet är av typen "0/0", så täljaren och nämnaren har det gemensamma nollstället $-3$. Vi förlänger med konjugerat uttryck till nämnaren:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x+4}\sqrt{x+12}+x}{x+3} &= \frac{(x+4)(x+12)-x^2}{(x+3)(\sqrt{x+4}\sqrt{x+12}-x)} = \\ &= \frac{16(x+3)}{(x+3)(\sqrt{x+4}\sqrt{x+12}-x)} = \frac{16}{\sqrt{x+4}\sqrt{x+12}-x} \to \\ &\to \frac{16}{3+3} = \frac{8}{3},\end{aligned}$$

när $x \to -3$.
**Svar:** 8/3.

(f) Vi tänker på $y$ som en funktion $y(x)$ och deriverar likheten $x^3y^2 + 2/(x+y) \equiv 2$. Det ger $3x^2y^2 + x^3yy' - 2(1+y')/(x+y)^2 \equiv 0$. Insättning av $x = 0$, $y = 1$ ger $-2(1+y') = 0$, dvs $y' = -1$.

Tangenten har alltså riktningskoefficient $-1$ och går genom $(0,1)$. Det ger ekvationen $y = -x + 1$.

**Svar:** $y = -x + 1$.

2. (a) Vi söker parameterframställning av givna linjen genom att sätta $t = x + 1 = y + 2 = 3 - z$. Det ger $(x, y, z) = (-1, -2, 3) + t(1, 1, -1)$. Det ger att linjen går genom punkten $A = (-1, -2, 3)$ och har riktningsvektor $\bar{v} = (1, 1, -1)$, som är parallell med planet och därför vinkelrät mot en normal till planet. En annan punkt i planet är $B = (2, -5, 4)$ (given) och vektorn $\overrightarrow{AB} = (2+1, -5+2, 4-3) = (3, -3, 1)$. En normal till planet ges därför av

$$\bar{v} \times \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Vi har att vektorn $(1, 2, 3)$ är en normal till planet som därför har en ekvation av formen $x + 2y + 3z = d$. Insättning av $A$ ger $-1 - 4 + 9 = 4 = d$.

**Svar:** $x + 2y + 3z = 4$.

(b) Avståndet $D$ från en punkt $(x, y, z)$ till planet ges enligt avståndsformeln av

$$D = \frac{|x + 2y + 3z - 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^3}}.$$

För $(1, 1, 5)$ ger detta $D = 14/\sqrt{14} = \sqrt{14}$.
**Svar:** $\sqrt{14}$.

3. Funktionen $f(x) = 5/(4(x^2+1)) + \arctan(x)$ är definierad för alla värden på $x$.

När $x \to -\infty$ gäller att $f(x) \to 0 - \pi/2$, och $f(x) \to 0 + \pi/2$, när $x \to \infty$. Det betyder att linjen $y = -\pi/2$ är en asymptot i $-\infty$, medan $y = \pi/2$, är asymptot i $\infty$.

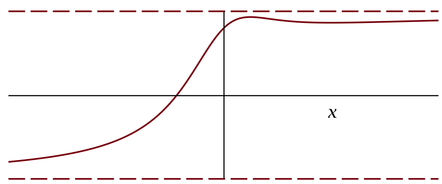
Derivering ger

$$f'(x) = \frac{5}{4} \cdot \frac{-2x}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2 - 5x/2 + 1}{(1+x^2)^2} = \frac{(x-2)(x-1/2)}{(1+x^2)^2}.$$

Det ger att $f(x)$ är strängt växande på $(-\infty, 1/2] \cup [2, \infty)$, och strängt avtagande på $[1/2, 2]$. Därför har $f(x)$ ett lokalt maximum i $x = 1/2$, och ett lokalt minimum i $x = 2$.

Vi har $f(1/2) = 1 + \arctan(1/2) < 1 + \arctan(1/\sqrt{3}) = 1 + \pi/6 < (2\pi + \pi)/6 = \pi/2$. och $f(2) = 1/4 + \arctan(2) > 0$.

Vi sammanställer i en graf:




Vi ser att värdemängden är intervallet $(-\pi/2, \pi/2)$.

**Svar:** Definitionsmängden är $(-\infty, \infty)$ och värdemängden $(-\pi/2, \pi/2)$. Funktionen är strängt växande på $(-\infty, 1/2] \cup [2, \infty)$ och strängt avtagande på $[1/2, 2]$. Den har ett lokalt maximum i $1/2$ och lokalt minimum i 2. Linje $y = \pi/2$ är en asymptot i $\infty$, medan $y = -\pi/2$ är asymptot i $-\infty$.

4. Vi söker maximum till funktionen $g(x) = f'(x)$, där $f(x) = (2x + 1)/(1 + x + x^2)$.

   Derivering ger

$$g(x) = \frac{2(1 + x + x^2) - (2x + 1)(1 + 2x)}{(1 + x + x^2)^2} = \frac{1 - 2x - 2x^2}{(1 + x + x^2)^2}$$

   Etersom $x^2 + x + 1 = (x + 1/2)^2 + 3/4 \geq 3/4$ är $g(x)$ definierad för alla $x$ och vi ser att $g(x) \to 0$, när $x \to \pm\infty$.

   Vi deriverar $g(x)$ för att söka största värdet:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{(-2 - 4x)(1 + x + x^2)^2 - (1 - 2x - 2x^2)(1 + 2x)2(1 + x + x^2)}{(1 + x + x^2)^4} = \\ &= \frac{-2(1 + 2x)(1 + x + x^2 + 1 - 2x - 2x^2)}{(1 + x + x^2)^3} = \frac{-2(1 + 2x)(2 - x - x^2)}{(1 + x + x^2)^2} = \\ &= \frac{-2(1 + 2x)(x - 1)(-x - 2)}{(1 + x + x^2)^3} = \frac{2(x + 2)(2x + 1)(x - 1)}{(1 + x + x^2)^3} \end{aligned}$$

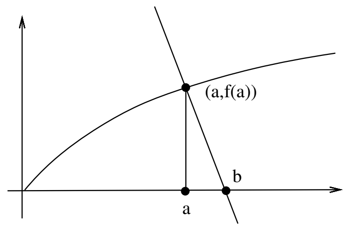
   Eftersom $x^2 + x + 1 = (x + 1/2)^2 + 3/4$ alltid är $> 0$ har $g'(x)$ teckenväxling i $x = -2$, $x = -1/2$ och $x = 1$. Vi får att $g(x)$ växer när $x \in [-2, -1/2] \cup [1, \infty)$ och avtar när $x \in (-\infty, -2] \cup [-1/2, 1]$. Vi har lokalt maximum bara i $x = -1/2$, där $g(x) = (1 + 1 - 1/2)/(1 - 1/2 + 1/4)^2 = (3/2)/(9/16) = 8/3$. Detta är också största värdet till $g(x)$, eftersom $g(x) \to 0$, när $x \to \pm\infty$.

   Punkten på grafen till $f$ är alltså $(-1/2, f(-1/2)) = (-1/2, 0)$.

   **Svar:** I punkten $(-1/2, 0)$.

5. Normalen till grafen av $f$ i punkten $(a, f(a))$ har lutning $-1/f'(a)$, eftersom den är vinkelrät mot tangenten där, vars lutning är $f'(a)$.

   Normalen går genom $(a, f(a))$ och har därför ekvationen $y = (-1/f'(a))(x - a) + f(a)$. Den skär $x$-axeln i $b$ som löser $0 = (-1/f'(a))(x - a) + f(a)$. Det ger $b = a + f(a)f'(a)$.




Triangenls area är $A(a) = (b-a)f(a)/2 = f(a)^2 f'(a)/2$. Sätter vi $g(x) = f(x)^2 f'(x) = (1-e^{-x})^2 e^{-x}$ har vi att $A(x) = g(x)/2$.

Vi söker nu eventuella största och minsta värden till $g(x)$, då $x > 0$.

Vi har $g(x) \to 0$, när $x \to \infty$ och

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2(1-e^{-x})e^{-2x} - (1-e^{-x})^2 e^{-x} = (1-e^{-x})e^{-x}(2e^{-x} - 1 + e^{x}) = \\ &= e^{-x}(1-e^{-x})(3e^{-x} - 1). \end{aligned}$$

Här är de två första faktorerna $> 0$ när $x > 0$, så tecknet bestäms av $(3e^{-x} - 1)$ som växlar tecken i $x = \ln 3$. Det visar att $g(x)$ har ett största värde $g(\ln 3) = 4/27$ och att minsta värde saknas.

**Svar:** Största arean är $2/27$, men minsta area saknas.

6. (a) Med formel för dubbla vinkeln och trigonometriska ettan gäller

$$\frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos(2\cdot x/2)}{1+\cos(2\cdot x/2)} = \frac{1-\cos^2(x/2)+\sin^2(x/2)}{1+\cos^2(x/2)-\sin^2(x/2)} = \frac{2\sin^2(x/2)}{2\cos^2(x/2)} = \tan^2(x/2).$$

Eftersom $\tan(t) \neq \tan^2 t$, när $t \neq n\pi$, $\pi/4 + n\pi$ stämmer inte påståendet. (Alternativt kan man pröva med $\pi/3$. Då blir vänstra ledet i påståendet $1/\sqrt{3}$, medan det högra blir $1/3$.)

**Påståendet är falskt.**

(b) Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x) & \text{när} \quad x > 0 \\ 0 & \text{när} \quad x = 0 \end{cases}$$

är kontinurelig på $[0, \infty)$, men har inget lokalt extremvärde i $x = 0$, eftersom $f(2/(\pi(1+4n)) > 0$, medan $f(2/(\pi(6+4n)) < 0$.

**Påståendet är falskt.**

(c) Om $(f(x) - f(a))/(x-a)^2$ har ett gränsvärde $> 0$ när $x \to a$, gäller att $(f(x) - f(a))/(x-a)^2 > 0$ i en omgivning till $a$, så när som på när $x = a$. Det betyder $f(x) - f(a)$ är $> 0$ i denna omgivning, eftersom detta gäller för $(x-a)^2$. Alltså är $f(x) > f(a)$ för alla $x$ i en omgivning till $a$ (utom i $x = a$). Alltså har $f(x)$ ett lokalt minimum i $x = a$.

**Påståendet är sant.**