Lösningar till MVE012 Inledande matematik för I 17-10-26

1. (a) Termer samlas i ena ledet och skrivs på gemensamt bråkstreck:

$$0 \leq \frac{2}{2+x-x^2} - 1 = \frac{x^2-x}{(x-1)(2-x)} = \frac{x(x-1)}{(x+1)(2-x)}$$

Detta ger ett uttryck med teckenväxlingar i -1, 0, 1 och 2, men där det är odefinierat i -1 och 2. Detta ger att uttrycket är ≥ 0 när $-1 < x \leq 0$ och när $1 \leq x < 2$.

Svar: När $-1 < x \leq 0$ och när $1 \leq x < 2$.

(b) Båda logarimerna är definierade precis när $0 < x$, så eventuell lösning ska vara positiv. Logarimtlagar och exponentiering ger att vi ska lösa

$$\begin{aligned} 2 &= \log_3\left(\frac{x^2+72}{x^2}\right) \\ 3^2 &= \frac{x^2+72}{x^2} \\ 8x^2 &= 72 \end{aligned}$$

Detta ger $x = \pm 3$, där bara 3 är positivt.

Svar: 3.

(c) Vi har att $f^{-1}(y)$ är det värde på x som löser $y = f(x)$:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1+4x}{1+x} \\ y(1+x) &= 1+4x \\ x(y-4) &= 1-y \\ f^{-1}(y) = x &= \frac{1-y}{y-4} \end{aligned}$$

Detta ger $f^{-1}(x) = (1-x)/(x-4)$.

Svar: $f^{-1}(x) = (1-x)/(x-4)$.

(d) För att $f(x)$ ska vara definerad ska vi ha $x^2 - 1 \neq 0$, vilket ger att $f(x)$ är definierad över allt utom i ± 1.

Derivering ger

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-1) - 2x \cdot x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(x^2-1)^2}$$

Detta ger att f' är positiv på intervallen $(-\infty, -\sqrt{3})$ och $(\sqrt{3}, \infty)$, som båda ligger i f:s definitionsmängd. Alltså är f strängt växande på intervallen $(-\infty, -\sqrt{3}]$ och $[\sqrt{3}, \infty)$.

Svar: På intervallen $(-\infty, -\sqrt{3}]$ och $[\sqrt{3}, \infty)$.

(e) i. Omskrivning ger

$$\frac{\tan 2x}{x} = \frac{\sin 2x}{x \cos 2x} = \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{2}{\cos x} \to 1 \cdot \frac{2}{1},$$

när $x \to 0$.

Svar: 2.

ii. Vi har att $Q = (\arctan x - x)/(\cos x - 1)$ ger ett gränsvärde av typ ”0/0”, när $x \to 0$. Derivering av täljare och nämnare för sig ger kvoten

$$Q_1 = \frac{\frac{1}{1+x^2} - 1}{-\sin x} = \frac{-x^2}{1+x^2} \cdot \frac{-1}{\sin x} = \frac{x}{1+x^2} \cdot \frac{x}{\sin x} \to 0 \cdot 1 = 0,$$

när $x \to 0$. Lt'Hospitals regel ger att även Q har detta gränsvärde.

Svar 0.

(f) Implicit derivering ger $4y^3 \cdot y' + 6x^2 = y + xy'$. Med $x = -1$ och $y = 1$ ger detta $4y' + 6 = 1 - y'$ och $y' = -1$. Det betyder att tangenten genom $(-1, 1)$ har riktningskoefficient -1. En ekvation för den ges därför av $y = -(x+1) + 1 = -x$.

Svar: $y = -x$.

2. (a) Vi söker parameterframställning av linjen, för att bestämma riktningvektor $\bar{v}$ och punkt A på den, som båda ligger i planet.

$$t = \frac{x-1}{5} = \frac{y}{2} = \frac{1-z}{3}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = A + t\bar{v}$$

Vi sätter $B = (1, 2, 3)$ (den givna punkten i planet) och har då

$$\vec{AB} \times \bar{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix} = -10 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Detta ger att $-1/10$ av denna vektor är en normal till planet, som därför har ekvation $x - y + z = d$. Det går genom punkten A vilket ger $d = 2$.

Svar: $x - y + z = 2$.

(b) Enligt avståndsformel ger planets ekvation på formen $x - y + z - 2 = 0$ att avståndet mellan det och punkten $(5, 2, -3)$ är

$$\frac{|5 - 2 - 3 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

Svar: $2\sqrt{3}/3$.

3. Funktionen är definierad när $x^2 - 1 > 0$, vilket ger att $D_f = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

Vi har

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}((x^2 - 1)\ln(x^2 - 1) + 4x - 2)$$

Standardgränsvärde ger att sista faktorn $\to 0 - 4 - 2 = -6$ när $x \to -1^-$, medan första faktorn då $\to \infty$. Vi får att $f(x) \to -\infty$, när $x \to -1^-$.

När $x \to 1^+$ gäller istället att andra faktorn ovan $\to 0 + 4 - 2 = 2$, medan första då $\to \infty$. Vi får att $f(x) \to \infty$, när $x \to 1^+$.

Vi har alltså de lodräta asymptoterna $x = \pm 1$.

När $x \to \pm\infty$, gäller att $f(x) \to \infty$. Vi har

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\ln(x^2(1 - 1/x^2))}{x} + \frac{4x - 2}{x(x^2 - 1)} = \frac{2\ln|x|}{x} + \frac{\ln(1 - 1/x^2)}{x} + \frac{4x - 2}{x(x^2 - 1)} \to 0 + 0 + 0 = 0$$

när $x \to \pm\infty$, som ger riktningskoefficient 0 för eventuella asymptoter i $\pm\infty$. Eftersom $f(x) - 0 \cdot x$ saknar egentligt gränsvärde när $x \to \pm\infty$, saknas asymptoter i $\pm\infty$.

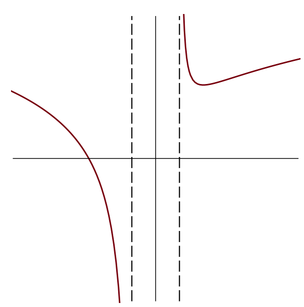
Vi har

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x}{x^2-1} + \frac{4(x^2-1) - 2x(4x-2)}{(x^2-1)^2} = \frac{2x(x^2-1) + (-4x^2+4x-4)}{(x^2-1)^2} = \\ &= \frac{2x^3 - 4x^2 + 2x - 4}{(x^2-1)^2} = \frac{2(x-2)(x^2+1)}{(x^2-1)^2}. \end{aligned}$$

Av detta följer att f' är positiv när $x > 2$ och negativ när $x < 2$ och i definitionsmängden. Vi får att f är stängt avtagande på intervallen $(-\infty, -1)$ och $(1, 2]$, medan den är strängt växande på $[2, \infty)$.

Enda lokala extrempunkten blir därför 2 där vi har ett lokalt minimum och $f(2) = 2 + \ln 3$, som är positivt.

Resultaten ovan ger figuren



Vi avläser här att värdemängden är $V_f = (-\infty, \infty)$.

Svar: Definitionsmängden är $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Asymptoter är $x = \pm 1$. Funktionen är strängt avtagande på $(-\infty, -1)$ och på $(1, 2]$ och strängt växande på $[2, \infty)$. Den har den lokala minpunkten 2 där $f(2) = 2 + \ln 3$. Värdemängden är $(-\infty, \infty)$.

4. Vi sätter $f(x) = \sin x + \tan x - 2x$ och ska visa att $0 < f(x)$, när $0 < x < \pi/2$.

   Vi har

$$f'(x) = \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2 = \frac{\cos^3 x - 2\cos^2 x + 1}{\cos^2 x} = \frac{(\cos x - 1)(\cos^2 x - \cos x - 1)}{\cos^2 x}$$

   Första faktorn i täljaren är negativ när $0 < x < \pi/2$, medan nämnaren är positiv. Vi ska avgöra tecknet på den andra. Det är samma som tecknet på $p(t) = t^2 - t - 1 = (t - (1+\sqrt{5})/2)(t + (1+\sqrt{5})/2)$, när $0 < t < 1$, vilket är negativt eftersom t då uppfyller $-(1+\sqrt{5})/2 < t < (1+\sqrt{5})/2$.

   Totalt ger detta att $f'(x) > 0$ när $0 < x < \pi/2$ och att $f(x)$ är strängt växande på $[0, \pi/2)$. Alltså gäller då $f(0) < f(x)$ när $0 < x < \pi/2$ och därmed att $0 < f(x)$, eftersom $f(0) = 0$.

5. Tangenten i punkten $(a, f(a))$ har ekvation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ som blir $y = -e^{-a}(x-a) + e^{-a}$. Den skär x-axeln i $x = a+1$ och y-axeln i $e^{-a}(a+1)$. Triangen med hörn i de två skärningspunkterna och origo har därför arean $A(a) = e^{-a}(a+1)^2/2$. Vi sätter $g(x) = e^{-x}(x+1)^2$ och söker största och minsta värden till den när $0 \leq x$.

Vi har

$$g'(x) = e^{-x}(2(x+1) - (x+1)^2) = e^{-x}(x+1)(1-x)$$

Detta ger att g är strängt växande på $[0,1]$ och strängt avtagande på $[1,\infty)$. Därmed har g ett största värde i $x = 1$ som är $A(1) = g(1)/2 = 2/e$. Alltså är triangelns största möjlig area $A(1) = 2/e$. Vi har $A(0) = 1/2$ och att $A(a) \to 0$ när $a \to \infty$. Detta ger att A saknar minsta värde.

Svar: Största möjliga area är $2/e$. Arean kan bli godtyckligt liten.

6. (a) Tangenten i $(a, a^3 + a + 1)$ har ekvation $y = (3a^2 + 1)(x - a) + a^3 + a + 1$. Den ska gå genom origo vilket ger $0 = -2a^3 + 1$, som har en lösning. Alltså finns en sådan tangent (när $a = 1/2^{1/3}$.)

   Svar: Påståendet är sant.

   (b) För $f(x) = e^{-x}$ gäller att den är strängt avtagande och konkav uppåt.

   Svar: Påståendet är falskt.

   (c) Vi har att

$$\frac{f(x) - f(x)}{(x-a)^3} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \frac{1}{(x-a)^2}$$

   Här gäller att första faktorn har gränsvärdet $f'(a) \neq 0$, medan den andra har det oegentliga gränsvärdet ∞, när $x \to a$. Det ger att kvoten bara har oegentligt gränsvärde när $x \to a$. Detta stämmer inte med förutsättningen.

   Svar: Påståendet är falskt.