Lösningar till MVE012 Inledande matematik för I1 18-08-29

1. (a) Vi har med faktorsatsen

$$\begin{aligned} 0 &> p(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6 = (x+2)(x^3 - 3x^2 + x - 3) = \\ &= (x+2)((x-3)x^2 + (x-3)) = (x+2)(x-3)(x^2+1). \end{aligned}$$

Här är sista faktorn alltid ≥ 1, så tecknet på $p(x)$ bestäms av de två övriga, där det är teckenväxlingar i -2 respektive 3. Detta ger att olikheten löses av x när $-2 < x < 3$.

Svar: När $-2 < x < 3$.

(b) Vi har ett homogent ekvationssystem, som vi löser genom att göra radoperationer till trappstegsform för att bestämma pivotkolonner:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & a \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & a \\ 0 & -5 & 1-2a \\ 0 & 7 & 1+2a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & a \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 7 & 1+2a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & a \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -6+2a \end{pmatrix}.$$

Detta ger att alla kolonner är pivotkolonner när $a \neq 3$, och då finns det precis en lösning. När $x = 3$ är det bara två pivotkolonner och då finns oändligt många lösningar.

Svar: När $a = 3$.

(c) Vi har $f(\pi/4) = (1 + \tan \pi/4)/\cos \pi/4 = 2/(1/\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$ och enligt kvotregeln vid derivering att

$$f(x) = \frac{(1 + \tan^2 x)\cos x + (1 + \tan x)\sin x}{\cos^2 x},$$

som ger

$$f'(\pi/4) = \frac{2/\sqrt{2} + 2/\sqrt{2}}{1/2} = 4\sqrt{2}.$$

Detta ger att tangenten har ekvationen $y = 4\sqrt{2}(x - \pi/4) + 2\sqrt{2}$.

Svar: $y = 4\sqrt{2}x + \sqrt{2}(2 - \pi)$.

(d) Derivering enligt kedjeregeln och kvotregeln ger

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1 + \left(\dfrac{x+a}{1-ax}\right)^2} \cdot D\left(\frac{x+a}{1-ax}\right) = \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1 + \left(\dfrac{x+a}{1-ax}\right)^2} \cdot \frac{1 - ax + a(x+a)}{(1-ax)^2} = \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+a^2}{(1-ax)^2 + (x+a)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+a^2}{(1+a^2) + (1+a^2)x^2} = \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0 \end{aligned}$$

Svar: 0.

(e) i. Vi har efter förlängning med konjugerat uttryck

$$(\sqrt{x+4}-\sqrt{x})\sqrt{x} = \frac{((x+4)-x)\sqrt{x}}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x}} = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x}} = \frac{4}{\sqrt{1+\dfrac{4}{x}}+1} \to \frac{4}{1+1} = 2,$$

när $x \to \infty$.

Svar: 2.

(f) Vi sätter $t = \sqrt{x}$ och får att vi ska undersöka $Q = \dfrac{2\ln(1+t)-2t+t^2}{\sin t - t}$, när $t \to 0^+$. Successiv derivering av täljare och nämnare för sig ger

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{\dfrac{2}{1+t}-2+2t}{\cos t - 1} \\ Q_2 &= \frac{-\dfrac{2}{(1+t)^2}+2}{-\sin t} \\ Q_3 &= \frac{\dfrac{4}{(1+t)^3}}{-\cos t} \to -4, \text{ när } t \to 0^+. \end{aligned}$$

Eftersom Q, Q_1, Q_2 alla ger gränsvärden av typen "0/0" när $t \to 0^+$, gäller enligt l'Hospitals regel att alla kvoter har samma gränsvärde 0.

Svar: -4.

(g) Likheten $\cos x = (f(x)+g(x))(f(x)-g(x)) = f(x)^2 - g(x)^2$, ger med $x = 0$ att $1 = (\sqrt{2})^2 - g(0)^2$, dvs att $g(0) = \pm 1$.
Derivering av båda sidor i likheten ger $2f(x)f'(x) - 2g(x)g'(x) = -\sin x$, som med $x = 0$ ger $2\sqrt{2} - 2g(0)g'(0) = 0$, dvs att $g'(0) = \sqrt{2}/g(0) = \pm\sqrt{2}$.

Svar: $\pm\sqrt{2}$.

2. (a) Skärningslinjen mellan de två planen består av lösningarna till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 7x - 3y - 8z &= 34 \\ x - 2y + 2z &= -3. \end{cases}$$

Vi gör radoperationer till trappstegsform på systemtets utökade koefficientmatris för att lösa det:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -3 \\ 7 & -3 & -8 & 34 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 11 & -22 & 55 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \end{array}\right),$$

vilket ger $z = t$, $y = 5 + 2t$, $x = 7 + 2t$. Vi löser ut t ur detta och får

$$t = \frac{x-7}{2} = \frac{y-5}{2} = z.$$

Svar: $\dfrac{x-7}{2} = \dfrac{y-5}{2} = z.$

(b) Enligt räkningar i a) gäller att linjen har parameterframställningen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Det ger att $A = (7,5,0)$ är en punkt på linjen som har riktningsvektor $\bar{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sätter vi $B = (4,-1,0)$ har vi att parallellogrammen som späns ut av $\overrightarrow{AB}$ och $\bar{v}$ har area $|\overrightarrow{AB} \times \bar{v}|$, men också $h|\bar{v}|$, där h är avståndet mellan B och linjen.

Detta ger $h = |\overrightarrow{AB} \times \bar{v}|/|\bar{v}|$. Vi har

$$\overrightarrow{AB} \times \bar{v} = \begin{pmatrix} 4-7 \\ -1-5 \\ 0-0 \end{pmatrix} \times \bar{v} = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

som ger

$$h = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \bar{v}|}{|\bar{v}|} = \frac{3\sqrt{4+1+4}}{\sqrt{4+1+4}} = 3.$$

Svar: 3.

3. Funktionen $f(x) = e^{-x^2}\sqrt{2x^2-17}$ är definierad precis när $2x^2 - 17 \geq 0$, vilket ger att definitionsmängden är $(-\infty, -\sqrt{17/2}] \cup [\sqrt{17/2}, \infty)$.

Funktionen är jämn, så värdemängden är samma som värdemängden av $f(x)$ när x är $\geq$ och ligger i definitionsmängden, dvs när $x \in [\sqrt{17/2}, \infty)$.

Vi ser också att $f(x) \geq 0$ för alla x, med likhet precis när $x = \pm\sqrt{17/2}$. Det betyder att 0 är funktionens minsta värde.

Vidare gäller att

$$f(x) = \Big(\frac{2x^2+17}{e^{2x^2}}\Big)^{1/2} \to 0^{1/2} = 0,$$

när $x \to \infty$, eftersom $p(t)/e^{2t} \to 0$, när $t \to \infty$ och $p(t)$ är ett polynom. Detta ger att $f(x)$ har ett största värde och att det inträffar där derivatan är 0.

Derivering enligt produkt- och kedjereglerna ger

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-x^2}\Big(-2x\sqrt{2x^2-17} + \frac{2 \cdot 2x}{2\sqrt{2x^2-17}}\Big) = \frac{e^{-2x^2} \cdot 2x}{\sqrt{2x^2-17}} \cdot (-2x^2+17+1) = \\ &= \frac{e^{-2x^2}}{\sqrt{2x^2-17}} \cdot 4x(3-x)(3+x). \end{aligned}$$

Eftersom $3 > \sqrt{17/2}$ har vi att $f'(x) = 0$, när $x \geq \sqrt{17/2}$ precis när $x = 3$.

Eftersom $f(3) = e^{-1/9}\sqrt{18-17} = 1/e^9$, är detta största värdet på intervallet $[\sqrt{17/2}, \infty)$, där vi sen tidigare vet att minsta värdet är 0.

Detta ger nu att värdemängden är $[0, 1/e^9]$.

Svar: $[0, 1/e^9]$.

4. Funktionen $f(x) = e^{1/x^2}(3x + 4/x)$ är definierad för alla $x \neq 0$, så definitionsmängden är $(-\infty,\, 0) \cup (0,\, \infty)$.

   Det gäller att

$$\frac{f(x)}{x} = 3e^{1/x^2} + 4e^{1/x^2} \cdot \frac{1}{x} \to 3 \cdot e^0 + 4 \cdot e^0 \cdot 0 = 3,$$

   när $x \to \pm\infty$ och att

$$f(x) - 3x = 4 \cdot \frac{e^{1/x^2}}{x} + 3x(e^{1/x^2} - 1).$$

   Första termen i högra ledet går mot 0, när $x \to \pm\infty$. För andra termen sätter vi $t = 1/x$ och får att vi ska undersöka den när $t \to 0$. Vi får, med derivering av täljare och nämnare för sig, att

$$\begin{aligned} Q &= \frac{3e^{t^2} - 1}{t} \\ Q_1 &= \frac{6te^{t^2}}{1} \to 0, \end{aligned}$$

   när $t \to 0$. Eftersom Q ger ett gränsvärde av typen ”0/0” när $t \to 0$ gäller att även $Q \to 0$, när $t \to 0$, enligt l'Hospitals regel.

   Tillsammans får vi nu att $f(x) - 3x \to 0$, när $x \to \pm\infty$. Det betyder att linjen $y = 3x$ är en asymptot i $\pm\infty$.

   När $x \to 0^{\pm}$ gäller att

$$f(x) \quad = \quad e^{1/x^2}(3x + 4/x) \to \begin{cases} \infty & \text{när} \quad x \to 0^+ \\ -\infty & \text{när} \quad x \to 0^- \end{cases}.$$

   Detta ger att $x = 0$ är en lodrät asymptot.

   Derivering ger

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{1/x^2}\Big(-\frac{2}{x^3}\Big(\frac{4}{x} + 3x\Big) - \frac{4}{x^2} + 3\Big) = \frac{e^{1/x^2}}{x^4} \cdot (-8 - 6x^2 - 4x^2 + 3x^4) = \\ &= \frac{e^{1/x^2}}{x^4} \cdot (3x^4 - 10x^2 - 8) = \frac{e^{1/x^2}}{x^4} \cdot (x^2 - 4)(3x^2 + 2) = \frac{e^{1/x^2}}{x^4} \cdot (x - 2)(x + 2)(3x^2 + 2). \end{aligned}$$

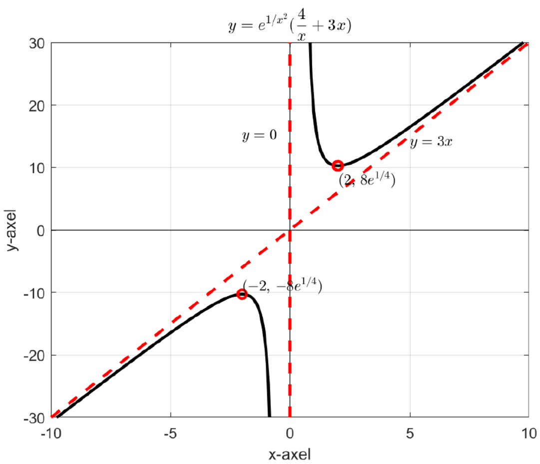
   Tecknet på $f'(x)$ bestäms därför av faktorerna $(x \pm 2)$.

   Vi får att $f'(x)$ är positiv när $x \in (-\infty,\, -2) \cup (2,\, \infty)$ och negativ när $x \in (-2,\, 0) \cup (0,\, 2)$.

   Det ger att $f(x)$ är växande på $(-\infty,\, -2] \cup [2,\, \infty)$ och avtagande på $[-2,\, 0) \cup (0, 2]$.

   Av detta följer att vi har ett lokalt maximum i $x = -2$, där $f(-2) = -8e^{1/4}$ och ett lokalt minimum i $x = 2$, där $f(2) = 8e^{1/4}$.

   Vi sammanfattar i följande figur



Svar: Definitionsmängden är $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Linjen $y = 3x$ är asymptot i $\pm\infty$ och $x = 0$ är en lodrätasymptot. Funktionen har lokalt maximum i $x = -2$ och lokalt minimum i 2. Den är växande på $(-\infty, -2] \cup [2, \infty]$ och avtagande på $[-2, 0) \cup (0, 2]$. Värdemängden är $(-\infty, -8e^{1/4}] \cup [8e^{1/4}, \infty)$.

5. Vi sätter tiden t till noll när båda befinner sig i origo. Låt v vara A:s fart. Vid tiden t befinner sig då A i punkten $a(t) = tv$ på y-axeln och B i $3tv$.

   Vi låter $\theta(t)$ beteckna vinkeln vid P i triangeln APB och $\phi(t)$ den vid P i triangeln OPA, där O är origo. Sätt p till avståndet mellan O och P.

   Då gäller

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \arctan(a(t)/p) = \arctan(tv/p)\\ \phi(t) + \theta(t) &= \arctan(3tv/p)\end{aligned}$$

   vilket ger
$$\theta(t) = \arctan(3tv/p) - \arctan(tv/p).$$

   Vi ska bestämma största värdet av θ när $t \in [0, \infty)$. Eftersom $\theta(t)$ alltid är ≥ 0 och $\theta(0) = 0$, samt $\theta(t) \to \pi/2 - \pi/2 = 0$, när $t \to \infty$ gäller att θ har ett största värde på intervallet $[0, \infty)$ och att det inträffar när $\theta'(t) = 0$. För att förenkla sätter vi $k = v/p$.

   Derivering ger

$$\begin{aligned}\theta'(t) &= \frac{3k}{1 + 9k^2t^2} - \frac{k}{1 + k^2t^2} =\\ &= k \cdot \frac{1}{1 + 9k^2t^2} \cdot \frac{1}{1 + k^2t^2}\Big(3(1 + k^2t^2) - (1 + 9k^2t^2)\Big) =\\ &= k \cdot \frac{1}{1 + 9k^2t^2} \cdot \frac{1}{1 + k^2t^2} \cdot 2(1 - 3k^2t^2)\end{aligned}$$

   Detta ger att $\theta'(t) = 0$ precis när $t = 1/(k\sqrt{3}) = p/(v\sqrt{3})$.

   Vi har
$$\theta(p/(v\sqrt{3})) = \arctan(\sqrt{3}) - \arctan(1/\sqrt{3}) = \pi/3 - \pi/6 = \pi/6.$$

   Svar: $\pi/6$.

6. (a) Om vi sätter $\bar{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\bar{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ gäller att $\bar{u} \bullet \bar{v} = 0$ och $\bar{u} \times \bar{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, som inte är nollvektorn. Alltså stämmer inte påståendet.

Svar: Det stämmer inte.

(b) Om vi sätter $f(x) = 2x$ och $g(x) = 2x+1$ gäller att $f'(0) = g'(0)$ och $f'(0)/g'(x) = 1 \to 1$, när $x \to 0$, men $f(x)/g(x) \to 0$, när $t \to 0$.

Svar: Det stämmer inte.

(c) Normalen till grafen av f i punkten $(a,\ f(a))$ har ekvationen $y = -(1/f'(a))(x-a) + f(a)$. När $f(x) = x^2$ ger det $y = -(x-a)/(2a) + a^2$. Frågan är om det finns nåt a så att $(4,\ 2)$ ligger på denna linje. Det inträffar precis när $2 = -(4-a)/(2a) + a^2$ eller när $4a = -4 + a + 2a^3$, dvs när $0 = 2a^3 - 3a - 4$. Sätt $g(a) = 2a^3 - 3a + 4$. Då är g kontinuerlig och definierad för alla reella tal. Vi har $g(0) = -4 < 0$ och $g(2) = 6 > 0$, så enligt satens om mellanliggande värden har g ett nollställe mellan 0 och 2. Alltså finns ett värde på a så att normalen i punkten (a, a^2) går genom $(4, 2)$.

Svar: Det stämmer.