Lösningar till MVE012 Inledande matematik för I1 18-10-31

1. (a) Derivering ger

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} + \frac{2}{1+x^2} = \frac{2(x+1)}{1+x^2}$$

som är negativ när $x < -1$ och positiv när $x > -1$. Det ger att minsta värdet är $f(-1) = \ln 2 + 2\arctan(-1) = \ln 2 - \pi/2$.

Svar: $\ln 2 - \pi/2$.

(b) Vi gör radoperationer på utökade koefficientmatrisen till trappstegsform :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ a & 0 & -(a+1) & 2a-3 \\ 1 & 2+2a & a & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2a & -1 & -3 \\ 0 & 2a & a+1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2a & -1 & -3 \\ 0 & 0 & a & 1 \end{pmatrix}.$$

Den sista matrisen är på trappstegsform om $a \neq 0$, men också när $a = 0$. När $a \neq 0$ är sista kolonnen inte pivotkolonn, så då finns lösning. När $a = 0$ är sista kolonnen pivotkolonn, så då saknas lösning.

Svar: När $a = 0$.

(c) Derivering enligt kvotregeln ger

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-\sin x(\cos x - \sin x) - \cos x(-\sin x - \cos x)}{(\cos x - \sin x)^2} = \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x - 2\cos x \sin x + \sin^2} = \frac{1}{1 - \sin 2x}, \end{aligned}$$

där sista steget använder att $\sin 2x = 2\cos x \sin x$.

Svar: $f'(x) = 1/(1 - \sin 2x)$.

(d) Det gäller att

$$(f^{-1})'(\sqrt{2} - 1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\sqrt{2} - 1))}.$$

Eftersom $f(1) = \sqrt{2} - 1$ gäller att $1 = f^{-1}(\sqrt{2} - 1)$. Vidare är

$$f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

som ger

$$(f^{-1})'(\sqrt{2} - 1) = \frac{1}{\frac{3}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3 - \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}(3 + \sqrt{2})}{7} = \frac{4 + 6\sqrt{2}}{7}$$

Svar: $(4 + 6\sqrt{2})/7$.

(e) Det gäller att $1+\tan^2 x = 1/\cos^2 x$, så $\cos^2 2v = 9/25$ och $\cos 2v = \pm 3/5$, där bara plustecknet gäller eftersom $2v \in [0, \pi/2]$.

Det gäller att $3/5 = \cos 2v = \cos^2 v - \sin^2 v = 2\cos^2 v - 1$, eller $\cos^2 v = 4/5$. Därmed är $\cos v = 2/\sqrt{5} = 2\sqrt{5}/5$, eftersom $v \in [0,\ \pi/4]$.

Svar: $2\sqrt{5}/5$.

(f) i. Förlänging med konjugat ger

$$\sqrt{x^2+x} - x \quad = \quad \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \frac{x}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+1/x}+1} \to \frac{1}{2},$$

när $x \to \infty$, där vi använt att $\sqrt{x^2} = |x| = x$, när $x > 0$.

Svar: $1/2$.

ii. Kvoten

$$Q = \frac{\mathrm{e}^{x-1} - x^2}{x^2 - \cos(x-1)}$$

ger ett gränsvärde av typen "0/0" när $x \to 1$. Derivering av täljare och nämnare ger kvoten

$$Q_1 = \frac{\mathrm{e}^{x-1} - 2x}{2x + \sin(x-1)},$$

som har gränsvärdet $(1-2)/(2+0) = -1/2$ när $x \to 1$. L'Hospitals regel ger att även Q har detta gränsvärdet.

Svar: $-1/2$.

2. (a) Linjen genom $(2,\ -4,\ -1)$ och $(5,\ 2,\ -1)$ parameteriseras av

$$\begin{cases} x &= 2+3t \\ y &= -4+6t \\ z &= -1 \end{cases}$$

och har därför riktningsvektorn

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Den andra linjen parameteriseras:

$$t = \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{9} = z+1$$

ger

$$\begin{cases} x &= 1+3t \\ y &= 2+9t \\ z &= -1+t \end{cases}$$

så den går genom $P = (1,\ 2,\ -1)$ och har riktningsvektor

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En normal till planet ges av

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix},$$

vilket ger att planets ekvation är av formen $2x - y + 3z = d$. Planet går genom $(2, -4, -1)$ vilket ger $4 + 4 - 3 = 5 = d$.

Svar: $2x - y + 3z = 5$.

(b) Eftersom linjerna i a) inte är parallella ges avståndet mellan dem av avstådet mellan en punkt (vilken som helst) på den andra linjen och planet. Med P som i a) ger avståndsformeln till ett plan att avståndet är

$$\frac{|2 - 2 - 3 - 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \frac{8}{\sqrt{14}} = \frac{4\sqrt{14}}{7}.$$

Svar: $4\sqrt{14}/7$.

3. Eftersom $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$ är definitionsmängden alla x utom $x = -1$ och $x = 2$.

Vi har

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^3}{x^2 - x - 2} = \frac{x(x^2 - x - 2) + (x^2 - x - 2) + 3x + 2}{x^2 - x - 2} = \\ &= x + 1 + \frac{3x + 2}{x^2 - x - 2} = x + 1 + \frac{3x + 2}{(x - 2)(x + 1)} \end{aligned}$$

Vilket ger att $y = x + 1$ är en asymptot i $\pm\infty$.

Vidare gäller att

$$f(x) \to \begin{cases} -\infty & \text{när} \quad x \to -1^- \\ \infty & \text{när} \quad x \to -1^+ \\ -\infty & \text{när} \quad x \to 2^- \\ \infty & \text{när} \quad x \to 2^+ \end{cases}$$

vilket ger att $x = -1$ och $x = 2$ är lodräta asymptoter.

Derivering enligt kvotregeln ger

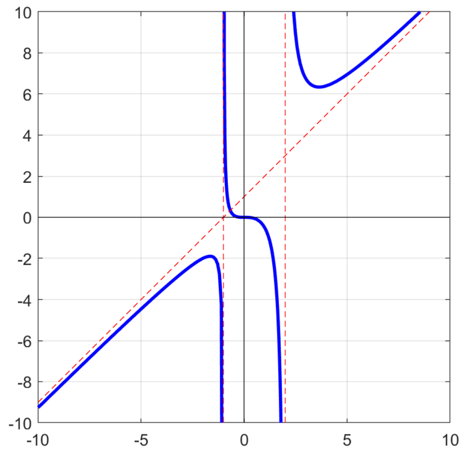
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3x^2(x^2 - x - 2) - x^3(2x - 1)}{(x - 2)^2(x + 1)^2} = \frac{x^4 - 2x^3 - 6x^2}{(x - 2)^2(x + 1)^2} = \frac{x^2(x^2 - 2x - 6)}{(x - 2)^2(x + 1)^2} = \\ &= \frac{x^2(x - 1 - \sqrt{7})(x - 1 + \sqrt{7})}{(x - 2)^2(x + 1)^2}. \end{aligned}$$

Detta ger att f' är positiv på $(-\infty, 1-\sqrt{7}) \cup (1+\sqrt{7}, \infty)$ och negativ på $(1-\sqrt{7}, -1) \cup (-1, 0) \cup (1, 2) \cup (2, 1 + \sqrt{7})$.

Med detta har vi att f är strängt växande på $(-\infty, 1 - \sqrt{7}] \cup [1 + \sqrt{7}, \infty)$ och strägt avtagande på $[1 - \sqrt{7}, -1) \cup (-1, 2) \cup (2, 1 + \sqrt{7}]$.

Vi har en lokal maxpunkt i $1 - \sqrt{7}$ där funktionen är negativ och en lokal minpunkt i $1 + \sqrt{7}$ där funktionen är positiv.

Vi sammanfattar i följande figur:



Svar: Definitionsmängden är $(-\infty,\ -1) \cup (-1,\ 2) \cup (2,\ \infty)$, asymptoterna är $y = x + 1$ i $\pm\infty$, samt $x = -1$ och $x = 2$. Funktionen är strängt växande på $(-\infty,\ 1-\sqrt{7}] \cup [1+\sqrt{7},\ \infty)$, strängt avtagande på $[1-\sqrt{7},\ -1) \cup (-1,\ 2) \cup (2,\ 1+\sqrt{7}]$ och har den lokala maxpunkten $1-\sqrt{7}$, medan $1+\sqrt{7}$ är en lokal minpunkt. Värdemängden är $(-\infty, \infty)$.

4. (a) Sätt

$$Q = \frac{\mathrm{e}^{ax} - 1 + 2x}{\cos x - 1}$$

som ger ett gränsvärde av typen "0/0" när $x \to 0$. Vi ska bestämma a så att Q har ett gränsvärde då. För kontinuitet i 0 ska vi sen sätta b till detta gränsvärde.

Derivering av täljare och nämnare ger

$$Q_1 = \frac{a\mathrm{e}^{ax} + 2}{-\sin x}$$

där nämnaren är 0 när $x = 0$, så vi behöver att även täljaren har detta nollställe för att denna kvot ska ha ett gränsvärde. Det ger $a = -2$.

Ytterligare derivering av täljare och nämnare ger nu

$$Q_2 = \frac{4e^{-2x}}{-\cos x},$$

som har gränsvärde -4, när $x \to 0$. L'Hospitals regel ger att även Q_1 och Q då har gränsvärdet -4.

Svar: $a = -2$ och $b = -4$.

(b) Differenskvoten för f i 0 ges av

$$Q = \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{e^{-2x} - 1 + 2x + 4(\cos x - 1)}{x(\cos x - 1)}$$

som ger ett gränsvärde av typen "0/0," när $x \to 0$.

Derivering av täljare och nämnare ger

$$Q_1 = \frac{-2e^{-2x} + 2 - 4\sin x}{\cos x - 1 - x\sin x}$$

som även den ger ett gränsvärde av typen "0/0" när $x \to 0$.
Ytterligare derivningar ger

$$Q_2 = \frac{4e^{-2x} - 4\cos x}{-\sin x - \sin x - x\cos x}$$

som också ger ett gränsvärde av typen "0/0" när $x \to 0$.

$$Q_3 = \frac{-8\mathrm{e}^{-2x} + 4\sin x}{-2\cos x - \cos x + x\sin x}$$

som har gränsvärdet 8/3 när $x \to 0$. L'Hospitals regel ger att även kvoterna Q_2, Q_1 och Q då har samma gränsvärde. Det betyder att f är deriverbar och att $f'(0) = 8/3$.

Svar: Ja, derivatan är $f'(0) = 8/3$.

5. Låt x vara avståndet från P till den övre långsidan i figuren. Då gäller att $\alpha = \arctan x/2$, $\beta = \arctan((3-x)/5)$. Vi söker alltså $x \in [0,\, 3]$ så att

$$f(x) = \arctan(x/2) + \arctan((3-x)/5)$$

har ett största värde på intevallet i x.
Derivering ger

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+(x/2)^2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{1+((3-x)/5)^2} \cdot 15 = \frac{2}{4+x^2} - \frac{5}{25+(3-x)^2} = \\ &= \frac{2(34-6x+x^2) - 5(4+x^2)}{(4+x^2)(25+(3-x)^2)} = \frac{-3(x^2+4x-16)}{(4+x^2)(25+(3-x)^2)} = \\ &= \frac{-3(x+2-\sqrt{20})(x+2+\sqrt{20})}{(4+x^2)(25+(3-x)^2)} \end{aligned}$$

Av detta ser vi att f' är positiv på $(0, \sqrt{20}-2)$ och negativ på $(\sqrt{20}-2, 3)$. Det betyder att f har ett största värde när $x = \sqrt{20}-2$.

Svar: $\sqrt{20} - 2$ från översta långsidan i figuren ovan.

6. (a) Funktionen $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ är konkav uppåt på $(-\infty, \infty)$, men strängt avtagande där.

Svar: Det stämmer inte.

(b) Om t.ex. $f(x) = x + \sqrt{x}$ gäller att $f(x)/x = 1 + 1/\sqrt{x} \to 1$, när $x \to \infty$, men $f(x) - 1 \cdot x = \sqrt{x}$ saknar egentligt gränsvärde när $x \to \infty$, vilket betyder att f inte har nån asymptot i ∞.

Svar: Det stämmer inte.

(c) Om man sätter $f(x) = \sqrt{x}$ gäller att

$$f(x^2+1) - f(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x}$$

och enligt medelvärdessatsen på intervallet $[x,\, x^2+1]$ gäller att

$$\frac{f(x^2+1) - f(x)}{(x^2+1) - x} = f'(c) = \frac{1}{2\sqrt{c}}$$

för nåt $c \in [x,\, x^2+1]$. Det betyder att

$$\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{c}} \cdot (x^2+1-x).$$

Svar: Det stämmer.