Lösningar till MVE012 Inledande matematik för I1 19-01-08

1. (a) Om $|2x-1| = |x|$ gäller att $2x-1=x$ eller att $2x-1=-x$. Den första ekvationen ger $x=1$, den andra $x=1/3$.

Svar: $x=1$ och $x=1/3$.

(b) Vi gör radoperationer på utökade koefficientmatrisen till trappstegsform :

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2-a \\ 2 & 2a & 5 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 2 \\ 0 & 2-a & -1 & -a \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

När $a \neq 2$ är den sista matrisen på trappstegsform och varje variabel är basvariabel, eftersom de alla hör till pivotkolonner. Alltså finns det precis en lösning då. När $a=2$ är sista matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sista matrisen här är på trappstegsform. Sista kolonnen är inte pivotkolonn, så det finns lösningar. Andra variabeln är fri, så det finns oändligt många lösningar.

Svar: När $a=2$.

(c) För att funktionen ska vara definierad krävs att $x+2>0$, dvs att $x>-2$ och att $x \neq 0$. Alltså är den definierad på intervallet $(0, \infty)$.
Derivering enligt räkneregler ger

$$f'(x) \quad = \quad \frac{1}{2+x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-2-x}{x^2(2+x)} = \frac{(x-2)(x+1)}{x^2(x+2)}.$$

På intervallet $(0, \infty)$ har därför f' bara teckenväxling i 2. Vi har $f'<0$ på $(0, 2)$ och $f'>0$ på $(2, \infty)$. Detta ger att funktionens minsta värde på intervallet antas i 2 där $f(2) = \ln 4 + 1/2 = 2\ln 2 + 1/2$.

Svar: $2\ln 2 + 1/2$.

(d) Det gäller att

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))}.$$

Eftersom $f(4)=1$ gäller att $4 = f^{-1}(1)$. Vidare är

$$f'(x) = \frac{2+\sqrt{x} - x/(2\sqrt{x})}{(2+\sqrt{x})^2},$$

som ger

$$(f^{-1})'(1) \quad = \quad \frac{1}{f'(4)} = \frac{(2+2)^2}{2+2-4/(2\cdot 2)} = \frac{16}{3}$$

Svar: $16/3$.

(e) Tangenten i $(a,\, f(a))$ har ekvation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$. Eftersom $f'(x) = 3x^2 - 1$ har vi $y = (3a^2-1)(x-a) + a^3 - a$. Tangenten ska gå genom $(0,\, 16)$, vilket ger $16 = (3a^2-1)(-a) + a^3 - a = -2a^3$. Denna ekvation har (enbart) lösningen $a = -2$, så tangenten har ekvationen $y = 11(x+2) - 6 = 11x + 16$.

Svar: $y = 11x + 16$.

(f) i. Omskrivning enligt räkneregler ger

$$\ln(4x+2) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) \quad = \quad \ln\Big(\frac{4x+2}{\sqrt{x^2+1}}\Big).$$

Eftersom

$$\frac{4x+2}{\sqrt{x^2+1}} \quad = \quad \frac{x}{|\,x\,|} \cdot \frac{4+2/x}{\sqrt{1+1/x^2}} \to \frac{4+0}{1+0} = 4$$

när $x \to \infty$ gäller därför att

$$\ln(4x+2) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) \quad \to \quad \ln 4 = 2\ln 2$$

när $x \to \infty$.

Svar: $2\ln 2$.

ii. Kvoten

$$Q = \frac{\cos x - 1}{x\ln(x+1)}$$

ger ett gränsvärde av typen ”0/0” när $x \to 0$. Derivering av täljare och nämnare ger kvoten

$$Q_1 = \frac{-\sin x}{\ln(x+1) + x/(x+1)},$$

som också är av typen ”0/0” när $x \to 0$. Ytterligare derivering ger

$$Q_2 = \frac{-\cos x}{1/(x+1) + (x+1-x)/(x+1)^2},$$

som har gränsvärdet $-1/(1+1) = -1/2$ när $x \to 0$. L'Hospitals regel ger att även Q_1 och Q har detta gränsvärde.

Svar: $-1/2$.

2. (a) En normal till planet genom de tre punkterna A, B, och C ges av $\vec{v} = \vec{AB} \times \vec{AC}$. Eftersom planet vi söker är vinkelrätt mot detta plan är $\vec{v}$ parallell med det sökta planet. Eftersom det ska gå genom B och C är $\vec{BC}$ också parallell med det sökta plantet. En normal till det ges därför av $\vec{v} \times \vec{BC}$.
Vi har

$$\vec{v} \quad = \quad \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Detta ger

$$\vec{v} \times \vec{BC} \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

så

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

är en nomral till det sökta planet som därför har ekvationen $5x - 2y - z = d$. Det går genom C så $5 - 2 - 0 = d$, dvs $d = 3$.
Svar: $5x - 2y - z = 3$.

(b) Enligt avståndsformel är avståndet från $(x, y, z) = (0, 1, 1)$ till planet

$$\frac{|\,5x - 2y - z - 3\,|}{\sqrt{5^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{-2 - 1 - 3}{\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{30}}{5}.$$

Svar: $\sqrt{30}/5$.

3. Funktionen är definierad för alla x utom när $x = -2$. Definitionsmängden är därför $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$.
Eftersom

$$\arctan x \to \begin{cases} -\pi/2 & \text{när} \quad x \to -\infty \\ \pi/2 & \text{när} \quad x \to \infty \end{cases}$$

gäller att

$$f(x) \to \begin{cases} -\pi/2 & \text{när} \quad x \to -\infty \\ \pi/2 & \text{när} \quad x \to \infty \end{cases}$$

Vi har också

$$f(x) \to \begin{cases} -\infty & \text{när} \quad x \to -2^- \\ \infty & \text{när} \quad x \to -2^+ \end{cases}$$

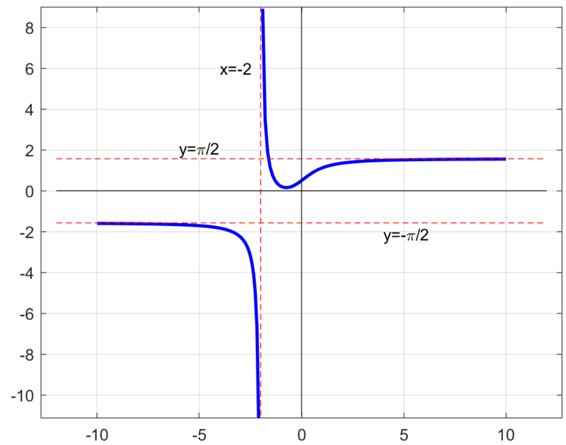
Detta ger att f har den lodräta asymptoten $x = -2$ och asymptoterna $y = -\pi/2$ samt $y = \pi/2$ i $-\infty$ respektive ∞.
Derivering ger

$$f'(x) \quad = \quad -\frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{1+x^2} = \frac{(x+2)^2 - 1 - x^2}{(x+2)^2(1+x^2)} = \frac{4x+3}{(x+2)^2(1+x^2)}.$$

Detta visar att f är strängt avtagande på $(-\infty, -2) \cup (-2, -3/4]$ och strängt växande på $[-3/4, \infty)$.
Vi har ett lokalt minimum i $x = -3/4$ där

$$f\Big(-\frac{3}{4}\Big) \quad = \quad \frac{4}{5} + \arctan\Big(-\frac{3}{4}) > \frac{4}{5} + \arctan(-1) = \frac{4}{5} - \frac{\pi}{4} = \frac{16 - 5\pi}{20} > 0.$$

Vi sammanfattar i följande figur:



Svar: Definitionsmängden är $(-\infty,\ -2) \cup (-2,\ \infty)$, asymptoterna är $y = -\pi/2$ i $-\infty$, $y = \pi/2$ i ∞ samt $x = -2$. Funktionen är strängt avtagande på $(-\infty,\ -2) \cup (-2,\ -3/4]$, strängt växande på $[-4/3,\ \infty)$ och har den lokala minpunkten $-3/4$, men ingen lokal maxpunkt. Värdemängden är $(-\infty, -\pi/2) \cup [4/5 - \arctan(3/4), \infty)$.

4. Det gäller att

$$f(x) = \ln\left(\frac{(x+2)^4}{(1+x^2)^{3/2}}\right) + \arctan x$$

är definierad för alla x utom när uttrycket i logaritmen är 0, dvs när $x = -2$.

Vidare gäller att samma uttryck $\to \infty$, när $x \to \pm\infty$. Eftersom $\arctan x \to \pm\pi/2$, när $x \to \pm\infty$, gäller därför att $f(x) \to \infty$, när $x \to \pm\infty$. När $x \to -2$ gäller att $f(x) \to -\infty$.

Räknerelger för logaritmer ger

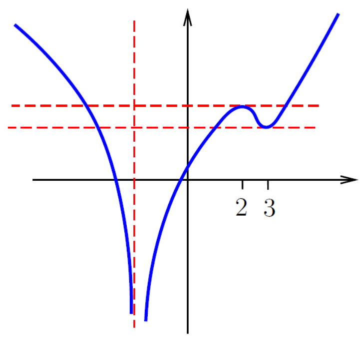
$$f(x) = 4 \ln |\, x + 2\, | - \frac{3}{2} \ln(1 + x^2) + \arctan x$$

Derivering ger därför

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4}{x+2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{2x}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} = \frac{4(1+x^2) - (3x-1)(x+2)}{(x+2)(1+x^2)} = \\ &= \frac{x^2 - 5x + 6}{(x+2)(1+x^2)} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x+2)(1+x^2)}. \end{aligned}$$

Av detta följer att f' är negativ på $(-\infty,\ -2) \cup (2,\ 3)$ och positiv på $(-2,\ 2) \cup (3,\ \infty)$. Därmed är f strängt avtagande på $(-\infty,\ -2) \cup [2,\ 3]$ och strängt växande på $(-2, 2] \cup [3,\ \infty)$.

Kalkylerna ger därför följande principiella skiss av grafen till f :



Detta ger att ekvationen $a = f(x)$ har

- precis två lösningar när $a < f(3)$ och när $a > f(2)$,
- precis tre lösningar när $a = f(3)$ och när $a = f(2)$,
- precis fyra lösningar när $f(3) < a < f(2)$.

Svar: Två lösningar när $a < f(3)$ och när $a > f(2)$, tre lösningar när $a = f(3)$ och när $a = f(2)$, samt fyra lösningar när $f(3) < a < f(2)$, där $f(2) = \ln(256/5^{3/2}) + \arctan 2$, och $f(3) = \ln(625/10^{3/2}) + \arctan 3$.

5. När farten är v m/s tar det s/v sekunder att köra sträckan s m, dvs $s/(60v)$ minuter. Bränslekostnaden är då $2 \cdot 50v^{3/2}s/(60v) = \frac{50}{60} \cdot 2s\sqrt{v}$.
   Kostnaden för besättningen är $400s/(60v) = \frac{50}{60} \cdot 8s/v$.
   Kostnaden att köra sträckan s är därför

$$\frac{5}{6}\Big(2s\sqrt{v} + \frac{8s}{v}\Big)$$

   vilket ger att konstnaden per körd sträcka är

$$f(v) = \frac{5}{6}\Big(2\sqrt{v} + \frac{8}{v}\Big).$$

   Derivering ger

$$f'(v) \quad = \quad \frac{5}{6}\Big(\frac{1}{\sqrt{v}} - \frac{8}{v^2}\Big) = \frac{5}{6}\Big(\frac{v^{3/2} - 8}{v^2}\Big).$$

   Detta ger att f' är negativ på $(0, 4)$ och positiv på $(4, \infty)$. Därmed har f ett minsta värde i $v = 4$.

   Svar: 4 m/s.

6. (a) Det gäller att

$$f(x) \quad = \quad \frac{x^3 + 2x^2 + 2}{x^2 + 1} = \frac{x(x^2 + 1) + 2(x^2 + 1) - x}{x^2 + 1} = x + 2 - \frac{x}{x^2 + 1}.$$

   Detta ger att $f(x) - (x + 2) \to 0$, när $x \to \pm\infty$, så f har den sneda asymptoten $y = x + 2$.

   Svar: Det stämmer inte.

(b) Om t.ex.

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x) & \text{när} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{när} \quad x = 0 \end{cases}$$

gäller att f är kontinuerlig på t.ex $[0, 1)$ för $0 \leq |f(x)| \leq |x| \to 0$, när $x \to 0$, så $f(x) \to 0$, när $x \to 0$.

I varje högeromgivning till 0 gäller att f antar såväl positiviva som negativa värden där. Alltså är $0 = f(0)$ inte ett lokalt extremvärde till f.

Svar: Det stämmer inte.

(c) Eftersom det förutsätts att $f(x)/x^4$ har ett gränsvärde L när $x \to 0$, gäller att

$$f(x) = \frac{f(x)}{x^4} \cdot x^4 \to L \cdot 0 = 0,$$

när $x \to 0$. Eftersom f förutsätts kontinuerlig i 0 gäller därför att $f(0) = 0$.

Eftersom $L > 0$ gäller att $f(x)/x^4 > 0$ i en punkterad omgivning till 0. Multiplikation med x^4, som är > 0 i denna omgivning, ger $f(x) > 0 = f(0)$ för alla $x \neq 0$ i en omgivning till 0. Detta är definitionen av att f har ett lokalt minimum i 0.

Svar: Det stämmer.