Lösningar till MVE012 Inledande matematik för I1 19-08-28

1. (a) $|\,x-2\,|$ är avståndet mellan x och 2 på tallinjen, $|\,x\,|$ är avståndet mellan x och 0. Att $|\,x-2\,|<|\,x\,|$ betyder att x ligger närmare punkten 2 än punkten 0. Det inträffar när $x>1$.

   Svar: När $x>1$.

   (b) Vi gör radoperationer på utökade koefficientmatrisen till trappstegsform :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2a & 2 & 3 \\ 1 & a & 1 & 3-a \\ 1 & 2a & a & a+3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2a & 2 & 3 \\ 0 & -a & -1 & -a \\ 0 & 0 & a-2 & a \end{pmatrix}.$$

   När $a\neq 0$ är den sista matrisen på trappstegsform. Sista kolonnen är då pivotkolonn precis när $a=2$. Då saknas lösning annars finns det precis en lösning. När $a=0$ är sista matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Sista matrisen här är på trappstegsform. Sista kolonnen är inte pivotkolonn, så det finns lösningar. Andra variabeln är fri, så det finns oändligt många lösningar.

   Svar: För alla värden på a utom 0 och 2.

   (c) För att logaritmerna ska vara definierade krävs i tur och ordning att $x>0$, att $x>3$ och att $x>2$. Vänstra ledet är alltså bara definierat när $x>3$. Räkneregler för logaritmer ger

$$2\log_2 x-\log_2(x-3)-\log_2(x-2)=\log_2\Big(\frac{x^2}{(x-2)(x-3)}\Big).$$

   Exponentiering av

$$\log_2\Big(\frac{x^2}{(x-2)(x-3)}\Big)=3$$

   ger

$$\frac{x^2}{x^2-5x+6}=2^3=8.$$

   som leder till $x^2=8x^2-40x+48$, eller $0=7x^2-40x+48=(x-4)(7x-12)$. Detta ger $x=4$ och $x=12/7$, men bara 4 är >3.
   Svar: $x=4$.

   (d) Derivering enligt kedjeregeln ger

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+(x^2-1)}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{1-(1/x)^2}}\cdot\frac{-1}{x^2}= \\ &= \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}-\frac{1}{x\sqrt{x^2}\sqrt{1-(1/x)^2}}=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}=0. \end{aligned}$$

   Svar: 0.

(e) i. Omskrivning enligt faktorsatsen ger

$$\frac{x^2-7x+12}{x^2-x-6} \quad = \quad \frac{(x-3)(x-4)}{(x-3)(x+2)} = \frac{x-4}{x+2} \to \frac{-1}{5}$$

när $x \to 3$.

Svar: $-1/5$.

ii. Kvoten

$$Q = \frac{\cos 2x - 1}{x \arctan 3x}$$

ger ett gränsvärde av typen "0/0" när $x \to 0$. Derivering av täljare och nämnare ger kvoten

$$Q_1 = \frac{-2\sin 2x}{\arctan 3x + 3x/(1+9x^2)},$$

som också är av typen "0/0" när $x \to 0$. Ytterligare derivering ger

$$Q_2 = \frac{-4\cos 2x}{3/(1+9x^2) + (3(1+9x^2) - 54x^2)/(1+9x^2)^2} \to \frac{-4}{3+3} = -\frac{2}{3}$$

$x \to 0$. L'Hospitals regel ger att även Q_1 och Q har detta gränsvärde.

Svar: $-2/3$.

(f) Funktionen är definierad för alla reella tal och $f(x) \to 0$ när $x \to \pm\infty$. Derivering ger

$$f'(x) = \frac{(1+x^2) - 2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}$$

som visar att f' är negativ på $(-\infty,\,-1) \cup (1,\,\infty)$ och positiv på $(-1,\,1)$. Därför är f strängt avtagande på $(-\infty, -1]$ och på $[1,\,\infty)$, medan f är strängt växande på $[-1,\,1]$. Detta ger att $f(-1) = -1/2$ är funktionens minsta värde medan $f(1) = 1/2$ är dess största.

Svar: $[-1/2,\,1/2]$.

2. (a) Linjen parametriseras genom att lösa ut x, y och z i

$$t = \frac{x+4}{3} = \frac{y+5}{4} = \frac{z+1}{2}'$$

vilket ger

$$\begin{cases} x &= & -4+3t \\ y &= & -5+4t \\ z &= & -1+2t. \end{cases}$$

Detta ger att $A = (-4,\,-5,\,-1)$ är en punkt på linjen och om $B = (6,\,0,\,3)$ så gäller att

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 6+4 \\ 0+5 \\ 3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{samt att} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

är en riktningsvektor för linjen.

Parallellogramen som spänns ut av $\vec{AB}$ och $\vec{v}$ har area $|\ \vec{AB} \times \vec{v}\,|$, men också $d|\,\vec{v}\,|$, där d är det sökta avståndet mellan B och linjen.
Det gäller att

$$\vec{AB} \times \vec{v} \quad = \quad \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \\ 25 \end{pmatrix}.$$

Detta ger

$$|\ \vec{AB} \times \vec{v}\,| = \sqrt{36 + 64 + 625} = \sqrt{725} = \sqrt{25 \cdot 29} = 5\sqrt{29}.$$

Eftersom $|\,\vec{v}\,| = \sqrt{9 + 16 + 4} = \sqrt{29}$ gäller att

$$d = \frac{|\ \vec{AB} \times \vec{v}\,|}{|\,\vec{v}\,|} = 5.$$

Svar: 5.

(b) Riktningsvektorn $\vec{v}$ för linjen i a) är en normal till planet som däför har en ekvation av formen $3x + 4y + 2z = d$. Det ska gå genom punkten $(6, 0, 3)$ vilket ger $18 + 0 + 6 = d$.
Svar: $3x + 4y + 3z = 24$.

3. Det gäller att

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + x - 2} = \frac{x^2 + x - 2 + (-x + 2)}{(x + 2)(x - 1)} = 1 - \frac{x - 2}{(x + 2)(x - 1)}.$$

Av detta följer att f är definierad för alla x utom -2 och 1, så definitionsmängden är $(-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, \infty)$.

Kalkylen ger också att $f(x) \to 1$, när $x \to \pm\infty$, så $y = 1$ är en asymptot i $\pm\infty$.

Vidare gäller

$$f(x) \to \begin{cases} \infty & \text{när} \quad x \to -2^- \\ -\infty & \text{när} \quad x \to -2^+ \\ -\infty & \text{när} \quad x \to 1^- \\ \infty & \text{när} \quad x \to 1^+. \end{cases}$$

Det ger att $x = -2$ och $x = 1$ är lodräta asymptoter.

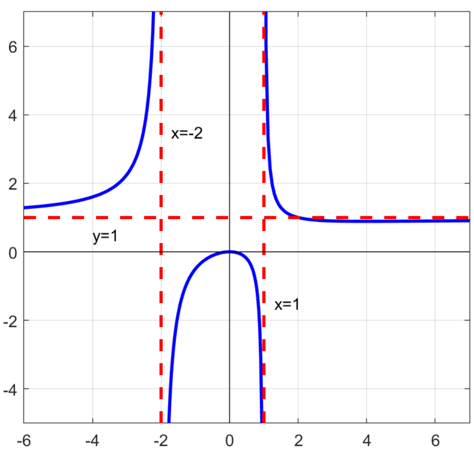
Derivering ger

$$f'(x) = 0 - \frac{(x + 2)(x - 1) - (x - 2)(2x + 1)}{(x + 2)^2(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 4x}{(x + 2)^2(x - 1)^2} = \frac{x(x - 4)}{(x + 2)^2(x - 1)^2}$$

vilket visar att f' är positiv på $(-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (4, \infty)$ och negativ på $(0, 1) \cup (1, 4)$. Alltså är f strängt växande på intervallen $(-\infty, -2)$, $(-2, 0]$ och $[4, \infty)$, medan funktionen är strängt avtagande på intervallen $[0, 1)$ och $(1, 4]$.

Det betyder att f har ett lokalt maximum i 0 och ett lokalt minimum i 4 där $f(0) = 0$, och $f(4) = 16/18 = 8/9$.

Vi sammanfattar i följande figur:



Svar: Definitionsmängden är $(-\infty,\,-2) \cup (-2,\,1) \cup (1,\,\infty)$. Asymptoterna är $y = 1$ i $\pm\infty$, $x = -2$ samt $x = 1$. Funktionen är strängt växande på $(-\infty,\,-2)$ på $(-2,\,0]$ och på $[4, \infty)$. Den är strängt avtagande på $[0,\,1)$ och på $(1,\,4]$. Den har ett lokalt maximum i 0 och ett lokalt minimum i 4. Värdemängden är $(-\infty,\,0] \cup [8/9,\,\infty)$.

4. Implicit derivering av sambandet $(x-2)^2 + y^2 = 2$ ger $2(x-2) + 2yy' = 0$, så $y' = -(x-2)/y$.

   I punkten $(a,\,b)$ på cirkeln gäller att $y(a) = b$ vilket ger att tangenten i punkten (a, b) har riktningskoefficient $y'(a) = -(a-2)/b$.

   Det ger att tangenten har ekvation

   $$y = -\frac{a-2}{b}(x-a) + b.$$

   Att den ska gå genom $(-2,\,0)$ ger att $0 = (a-2)(a+2)/b + b$, eller $b^2 = 4 - a^2$. Eftersom $(a,\,b)$ ligger på cirkeln gäller även att $(a-2)^2 + b^2 = 4$, vilket ger $4 = (a-2)^2 + 4 - a^2 = -4a + 8$, eller $a = 1$. Detta ger $b = \pm\sqrt{3}$.

   De finns därför två sådana tangenter som i uppgiften och de har ekvationer

   $$\begin{aligned} y &= -\frac{1-2}{\sqrt{3}}(x-1) + \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot x + \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ y &= -\frac{1-2}{-\sqrt{3}}(x-1) - \sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot x - \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

   Svar: $y = \sqrt{3}x/3 + 2\sqrt{3}/3$ och $y = -\sqrt{3}x/2 - 2\sqrt{3}/3$.

5. Sätt $x = |\,BA'\,|$, där $x \in [0,\,c]$. Sätter vi $y = |\,BC'\,|$ gäller att $|\,C'A\,| = c - y = |\,C'A'\,|$. Pythagora sats ger $(c-y)^2 = y^2 + x^2$, eller $y = (c^2 - x^2)/2c$. Triangelns area är därför

   $$f(x) = \frac{1}{4c}\,(x(c^2 - x^2)).$$

Derivering ger

$$f'(x) = \frac{1}{4c}(c^2 - 3x^2) = \frac{3}{4c}(\frac{c}{\sqrt{3}} - x)(\frac{c}{\sqrt{3}} + x).$$

På intervallet $[0,\, c]$ har därför f ett största värde i $x = c/\sqrt{3}$ och tringeln $C'BA'$ har då arean

$$f(c/\sqrt{3}) = \sqrt{3}c^2/18.$$

Svar: $\sqrt{3}c^2/18$.

6. (a) Om $A = (1,\, 0,\, 1)$, $B = (2,\, 3,\, 3,)$ och $C = (-4,\, 5,\, -4)$ gäller att triangelns area är hälften av arean av parallellogrammen som spänns ut av vektorerna $\vec{AB}$ och $\vec{AC}$. Arean av parallellogrammen är längden av $\vec{AB} \times \vec{AC}$ som ges av

$$\vec{AB} \times \vec{AC} \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Detta ger att tirangelns area är $(5/2)\sqrt{25 + 1 + 16} = 5\sqrt{42}/2$.

Svar: Det stämmer inte.

(b) Enligt definition är $f(0) = -1/2$. För kontinuitet i 0 krävs att $\lim_{x\to 0} f(x) = -1/2$.
När $x \to 0$ gäller att

$$Q = f(x) = \frac{\ln(1 + x) - x}{x^2}$$

ger ett gränsvärde av typ ”0/0”. Derivering av täljare och nämnare ger

$$Q_1 = \frac{1/(1 + x) - 1}{2x}$$

som också ger ett gräsnvärde av typ ”0/0” när $x \to 0$. Ytterligare deriveringar ger

$$Q_2 = \frac{-1/(1 + x)^2}{2} \to -\frac{1}{2},$$

när $x \to 0$. L’Hospitals reger ger att även Q_1 och Q har samma gränsvärde när $x \to 0$.

Svar: Det stämmer.

(c) Eftersom det förutsätts att $f(x)/x^4$ har ett gränsvärde L när $x \to 0$, gäller att

$$f(x) = \frac{f(x)}{x^4} \cdot x^4 \to L \cdot 0 = 0,$$

när $x \to 0$. Eftersom f förutsätts kontinuerlig i 0 gäller därför att $f(0) = 0$.

Svar: Det stämmer inte.