MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers

Tentamen i MVE012 Inledande matematik, I1.
Tid: 2018-10-31, kl 8.30 - 12.30.
Hjälpmedel: Inga, ej heller miniräknare.
Telefonvakt: Gustav Lindwall, tel 772 5325

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.
Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.
Bonuspoäng från hösten 2018 inkluderas. Lösningar läggs ut på kursens webbsida senast 1/11.
Resultat meddelas via Ladok senast tre veckor efter tentamenstillfället.
Kursens webbsida:
www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/mve012/1819/
Examinator: Jan Alve Svensson.

---

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.

   a) Bestäm minsta värdet till funktionen $f(x) = \ln(1+x^2) + 2\arctan x$. (2p)

   b) För vilket, eller vilka värden på a saknar ekvationssystemet (2p)

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ ax - (a+1)z = 2a-3 \\ x + (2+2a)y + az = 6 \end{cases}$$

   lösning?

   c) Beräkna derivatan till (2p)

$$f(x) = \frac{\cos x}{\cos x - \sin x}$$

   och uttryck svaret med $\sin 2x$ som enda förekommande trigonometriska funktion.

   d) Funktionen $f(x) = \sqrt{x^2+x} - \sqrt{x}$ är inverterbar. Bestäm $(f^{-1})'(\sqrt{2}-1)$. Förenkla! (2p)

   e) Man vet att $v \in [0,\, \pi/4]$ och att $\tan 2v = 4/3$. Bestäm $\cos v$. (3p)

   f) i. Beräkna $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x} - x)$. (1p)

   ii. Beräkna $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\mathrm{e}^{x-1} - x^2}{x^2 - \cos(x-1)}$. (2p)

2. a) Ett plan innehåller linjen genom de båda punkterna $(2,\, -4,\, -1)$ och $(5,\, 2,\, -1)$ och är parallellt med linjen med ekvationer (4p)

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{9} = z+1.$$

   Bestäm en ekvation för planet.

   b) Bestäm avståndet mellan de båda linjerna i a). (2p)

3. Skissa grafen till funktionen (6p)

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - x - 2}.$$

   Utred definitionsmängd, asymptoter, var funktionen växer respektive avtar, vilka lokala max- och minpunkter som finns, samt värdemängd.

MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers

---

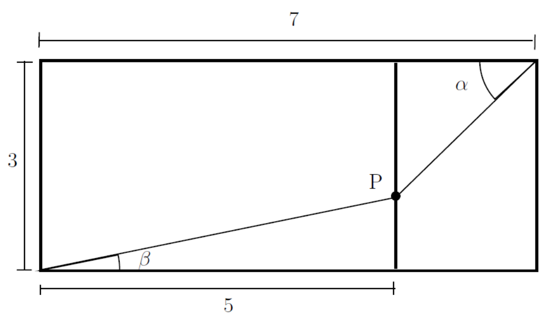
4. a) Bestäm a och b så att funktionen (3p)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{ax} - 1 + 2x}{\cos x - 1} & \text{när} \quad x \neq 0 \\ b & \text{när} \quad x = 0 \end{cases}$$

blir kontinuerlig i 0.

b) Är $f(x)$ då deriverbar i 0? Vad är i så fall $f'(0)$? (3p)

5. I en rektangel med sidorna 3 och 7 dras en linje parallellt med ena kortsidan på avstånd 2 från denna. På linjen väljs sedan en punkt P och man drar linjerna till de två hörnen, som i figuren. (6p)



Man får då två vinklar markerade med α respektive β. Var på linjen ska P placeras för att summan av de båda vinklarna ska bli så stor som möjligt?

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Motivera svaren. Högst två poäng per påstående. Att enbart ange “sant” eller “falskt” ger ingen poäng.

a) Om funktionen f är konkav uppåt på ett intervall, så är den strängt växande på intervallet.

b) Om $f(x)/x$ har ett (egentligt) gränsvärde när $x \to \infty$, så har f en asymptot i ∞.

c) För varje $x > 0$ finns ett tal c mellan x och $x^2 + 1$, så att

$$\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{c}} \cdot (x^2 - x + 1).$$

7. a) Visa att om funktionen f är kontinuerlig på intervallet $[a, b]$, med derivata f' som är 0 på (a, b), så är f konstant på $[a, b]$. (5p)

b) Visa, med derivatans definition, att en funktion som är konstant har derivata 0. (1p)