Serier och potensserier

J A S, ht-05

1 Serier

1.1 Allmänt om serier

När a_k är en talföljd kallas uttrycket

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k + \cdots$$

för en *serie*. Serien här börjar med index $k = 0$, men det är inte nödvändigt. När inga missförstånd anses kunna uppstå skrivs vänstra ledet ovan ofta $\sum_k a_k$, så att man själv får begripa med vilket värde på k man börjar och att k fortsätter mot ∞. En serie är alltså ett försök att summera oändligt många termer (i en bestämd ordning).

Det är viktigt att förstå att oändligt många tal inte alltid kan summeras. Serien $1 + 2 + \cdots + k + \cdots$ som förstås inte kan summeras till något vettigt. Inte heller $1/1 + 1/2 + \cdots + 1/k + \cdots$ kan summeras, men det är en aning svårare att förstå. Däremot kan serien man får av talföljden $1/k^2$ beräknas. Ett berömt resultat är nämligen

$$1 + 1/2^2 + 1/3^2 + \cdots + 1/k^2 + \cdots = \pi^2/6.$$

Men, vad ska egentligen likheten i detta betyda? Vad betyder det att summera oändligt många termer?

Till serien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ kan man bilda dess följd av partialsummor (eller delsummor):

$$\begin{aligned}
S_0 &= a_0 \\
S_1 &= a_0 + a_1 \\
&\vdots \\
S_n &= \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n
\end{aligned}$$

Den femte partialsumman till $\sum_k 1/k^2$ är t.ex. $1 + 1/4 + 1/9 + 1/16 + 1/25 = 5269/3600$.

Det är naturligt att definiera seriens summa som gränsvärdet av partialsummorna:

Definition 1.1 *En serie $\sum_k a_k$ är konvergent med summan (eller värdet)*

$$\sum_k a_k = \lim_{k\to\infty} S_k$$

om dess följd av partialsummor $S_0, S_1, S_2, \cdots, S_k, \ldots$ är konvergent. Annars är den divergent.

Den *geometriska* serien

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = 1 + r + r^2 + \cdots + r^k + \cdots,$$

som är mycket viktig, har då partialsumman $S_k = 1 + r + r^2 + \cdots + r^k$. Man ser genom multiplikation att $(1 - r)S_k = 1 - r^{k+1}$, så $S_k = (1 - r^{k+1})/(1 - r)$. När $r = 1$ är $S_k = k + 1$.

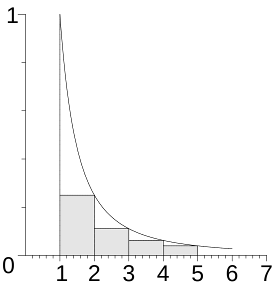
Av detta ser vi att S_k har ett gränsvärde $(1/(1 - r))$ bara när $|r| < 1$.

Den geometriska serien $\sum_{k=0}^{\infty} r^k$ är konvergent med summan

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}$$

när $|r| < 1$ och divergent annars.

Exempel 1.1 *Serien* $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ *är konvergent.*



Dess partialsummor S_k bildar en växande följd av tal som är uppåt begränsad och därmed konvergent. Vi har nämligen (se figuren)

$$S_k = 1 + 1/2^2 + \cdots + 1/k^2 \leq 1 + \int_1^k 1/x^2\,dx = 1 + \Big[-\frac{1}{x} \Big]_1^k = 2 - \frac{1}{k} < 2. \qquad \square$$

Vi har därmed sett att seriens summa har mening, men inte lyckats beräkna den. Att summan blir $\pi^2/6$ är väsentligt svårare att visa.

Sats 1.1 *Om serien* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *är konvergent, så gäller att* $a_k \to 0$*, när* $k \to \infty$*.*

Bevis. Vi vet att följden S_k av partialsummor har ett gränsvärde S, när $k \to \infty$. Följden S_{k-1} har förstås samma gränsvärde S. Vi har

$$a_k = S_k - S_{k-1} \to S - S = 0,$$

när $k \to \infty$. ■

Det är viktigt att förstå att omvändningen till satsen *inte* gäller (i allmänhet).

Exempel 1.2 *Serien* $\sum_{k=1}^{\infty} e^{1/k}$ *är divergent, eftersom* $e^{1/n}$ *har gränsvärdet* 1 *när* $n \to \infty$*.* □

Exempel 1.3 *Serien* $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ *är divergent* trots *att* $1/k \to 0$*, när* $k \to \infty$*.*

Seriens partialsummor bildar nämligen en växande följd som inte är uppåt begränsad:

$$S_k = 1/1 + 1/2 + \cdots + 1/k \geq \int_1^{k+1} 1/x\,dx = \ln(k+1)$$

Eftersom $\ln(k+1) \to \infty$ gör även S_k det, när $k \to \infty$. □

En serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, där alla termer a_k är > 0 (eller ≥ 0) kallas för en *positiv* serie.

En serie där termerna turas om att vara > 0 och < 0 kallas en *alternerande* serie. En sådan kan skrivas $\pm \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$, där alla a_k är > 0. För alternerande serier gäller

Sats 1.2 *Om* $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ *är en alternerande serie där* $a_k > 0$ *är en följd som* ***avtar*** *mot* 0*, så är serien konvergent.*

Bevis. Enligt förutsättningen gäller $0 < a_{k+1} \leq a_k$, för alla k. Vi har

$$S_{2k+1} = (a_0 - a_1) + \cdots + (a_{2k} - a_{2k+1}) = S_{2k-1} + (a_{2k} - a_{2k+1}) \geq S_{2k-1},$$

så de *udda* partialsummorna bildar en växande följd. Den är uppåt begränsad eftersom

$$S_{2k+1} = a_0 - (a_1 - a_2) - \cdots - (a_{2k-1} - a_{2k}) - a_{2k+1} \leq a_0$$

Låt S vara gränsvärdet av dessa *udda* partialsummor när $k \to \infty$. Vi har $S_{2k} = S_{2k+1} - a_{2k+1}$. Eftersom $a_k \to 0$ ser vi nu att även de jämna partialsummorna har gränsvärdet S, när $k \to \infty$. Därmed är serien konvergent. ■

Exempel 1.4 *Serien* $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k/k$ *är konvergent eftersom den är alternerande och följden* $1/k$ *avtar mot* 0*.* □

1.2 Positiva serier

Det är tillräckligt intressant att kunna avgöra om en serie konvergerar eller ej, för att det ska vara mödan värt att systematisera frågan, även om vi inte lyckas beräkna summan (exakt) vid konvergens. Om en serie konvergerar kan vi räkna ut ett närmevärde för dess summa genom att beräkna en partialsumma med (tillräckligt) många termer. Om en serie divergerar är det förstås meningslöst att försöka approximera dess summa (som inte finns).

För en positiv serie är följden av partialsummor S_k växande och är därför konvergent precis när den är uppåt begränsad. Frågan om konvergens för positiva serier är därför särskilt enkel att besvara; det räcker att avgöra om dess följd av partialsummor är uppåt begränsad eller ej.

1.2.1 Jämförelsekriterier

Sats 1.3 (Integralkriteriet) *Antag att $f(x) \geq 0$ är en kontinuerlig **avtagande** funktion definierad då $x \geq 0$. Sätt $f(k) = a_k$. Då är $\int_0^\infty f(x)\,dx$ och $\sum_{k=0}^\infty a_k$ antingen båda konvergenta eller båda divergenta.*

Här är valet av den nedre gränsen till 0 oväsentligt; det fungerar lika bra med vilket (hel)tal som helst.

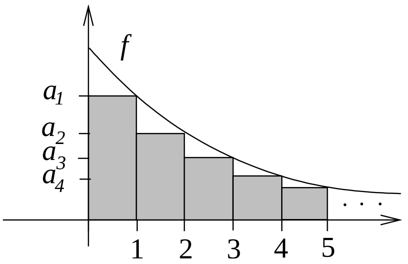


Fig 4. $S_5 - a_0$ är en undersumma till $\int_0^5 f(x)\,dx$.

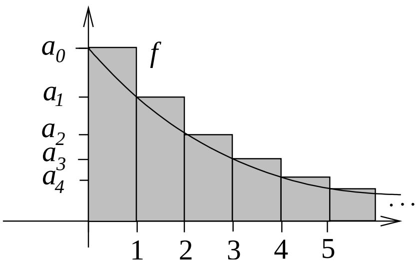


Fig 5. S_5 är en översumma till $\int_0^6 f(x)\,dx$.

Bevis. Antag först att integralen konvergerar. Om vi delar in intervallet $[0, k]$ i k lika stora delar så är $S_k - a_0$, där S_k är k:te partialsumman till serien, samtidigt en undersumma till $f(x)$ på $[0, k]$, så

$$S_k - a_0 \leq \int_0^k f(x)\,dx.$$

Detta ger $S_k \leq a_0 + \int_0^\infty f(x)\,dx$, så den växande följden S_k är uppåt begränsad och därför konvergent.

Antag sedan att serien konvergerar. Dela in $[0, k+1]$ i $k+1$ lika stora delar. Då är seriens k:te partialsumma S_k en översumma till $f(x)$ på $[0, k+1]$. Eftersom S_k är uppåt begränsad (av gränsvärdet S), är även $\int_0^b f(x)dx$ (som växer med b) uppåt begränsad. Alltså har $\int_0^b f(x)dx$ ett gränsvärde när $b \to \infty$, och $\int_0^\infty f(x)dx$ är konvergent. ■

En viktig slutsats är

Serien $$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^p}$$ är divergent när $p \leq 1$ och konvergent när $p > 1$

Man jämför serien med $\int_1^\infty (1/x^p)\,dx$.

Sats 1.4 (Jämförelsekriteriet) *Antag att $\sum_{k=0}^\infty a_k$ och $\sum_{k=0}^\infty b_k$ är positiva serier med $a_k \leq b_k$, för alla k. Om $\sum_{k=0}^\infty a_k$ är divergent så är $\sum_{k=0}^\infty b_k$ divergent. Om $\sum_{k=0}^\infty b_k$ är konvergent så är $\sum_{k=0}^\infty a_k$ konvergent.*

Bevis. Låt S_k och T_k beteckna partialsummorna till $\sum_{k=0}^\infty a_k$ respektive $\sum_{k=0}^\infty b_k$. Båda dessa följder är växande och förutsättningarna ger $S_k \leq T_k$ för alla k.

Om första serien är divergent är S_k inte uppåt begränsad och då kan heller inte T_k vara det. Alltså är även andra serien divergent.

Om andra serien är konvergent är följden T_k uppåt begränsad och därmed är även S_k. Detta ger att första serien är konvergent. ■

Exempel 1.5 *Serien $\sum_{k=1}^\infty \cos^2(k)/k^2$ är konvergent.*

Vi jämför med $\sum_{k=1}^\infty 1/k^2$ som vi vet är konvergent och utnyttjar att $\cos^2(k)/k^2 \leq 1/k^2$. □

Sats 1.5 (Kvotkriteriet) *Låt $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ vara en positiv serie, sådan att a_{k+1}/a_k har ett gränsvärde L, när $k \to \infty$. Om $L < 1$ är serien konvergent. Om $L > 1$ är den divergent. Ingen slutsats kan dras om $L = 1$.*

Bevis. Vi ska jämföra serien med en geometrisk serie. Antag först att $a_{k+1}/a_k \to L < 1$. Välj ett tal r mellan L och 1 så att $L < r < 1$. För stora värden på k, låt oss säga $k \geq n_0$, kommer då a_{k+1}/a_k att vara $< r$. Detta ger att $a_{k+1} < a_k r$, när $k \geq n_0$. Vi får

$$\begin{aligned} a_{n_0+1} &< a_{n_0} r \\ a_{n_0+2} &< a_{n_0+1} r < a_{n_0} r^2 \\ &\vdots \\ a_{n_0+k} &< \cdots < a_{n_0} r^k \end{aligned}$$

Eftersom $r < 1$ är den geometriska serien $a_{n_0} \sum_{k=0}^{\infty} r^k$ konvergent. Enligt jämförelsekriteriet är därför också $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ konvergent. (Därmed är också $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent.)

När $a_{k+1}/a_k \to L > 1$ gäller att $a_{k+1} > a_k$, när k är stort. Alltså kan a_k inte gå mot 0, när $k \to \infty$, så serien är divergent. ■

Exempel 1.6 *Avgör för vilka $b > 0$, som $\sum_{k=1}^{\infty} b^k/k$ är konvergent.*

Med $a_k = b^k/k$ har vi $a_{k+1}/a_k = bk/(k+1)$ som har gränsvärdet b, när $k \to \infty$. Serien är alltså konvergent när $b < 1$ och divergent när $b > 1$. När $b = 1$ är serien också divergent. □

Exempel 1.7 *Serien $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}$ är konvergent och $a_{k+1}/a_k = (k/(k+1))^2 \to 1$, när $k \to \infty$.* □

De två senaste exemplen illustrerar att ingen slutsats kan dras när $L = 1$.

1.3 Allmänna serier

En serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, där inget särskilt antas om tecknet på a_k, är *absolutkonvergent* om (den positiva) serien $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ är konvergent.

T.ex. är $\sum_{k=1}^{\infty} \cos(k)/k^2$ absolutkonvergent. Vi har nämligen att $\sum_{k=1}^{\infty} |\cos(k)/k^2|$ är konvergent om vi jämför med den större konvergenta serien $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$.

Sats 1.6 *Om $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ är absolutkonvergent, så är den också konvergent.*

Att vara absolutkonvergent är alltså "finare" än att vara konvergent.

Bevis. Tricket är att skriva serien som en skillnad av två konvergenta positiva serier. Vi har $a_k = |a_k| - (|a_k| - a_k)$, så

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| - \sum_{k=0}^{\infty} (|a_k| - a_k).$$

Båda serierna i högra ledet är positiva och den första är konvergent enligt antagandet. För den andra har vi $|a_k| - a_k \leq 2|a_k|$, så jämförelsekriteriet ger att även denna är konvergent. ■

Exempel 1.8 *Serien $\sum_{k=1}^{\infty} \cos(k)/k^2$, som varken är alternerande eller positiv, är konvergent eftersom den är absolutkonvergent.* □

En serie som är konvergent utan att vara absolutkonvergent sägs vara *betingat* konvergent. Ett exempel på en sådan är den alternerande serien $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k/k$.

Vi kan nu göra följande utökning av kvotkriteriet:

Sats 1.7 (Kvotkriteriet) *Låt $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ vara en serie, sådan att $|a_{k+1}/a_k|$ har ett gränsvärde L, när $k \to \infty$. Om $L < 1$ är serien konvergent. Om $L > 1$ är den divergent. Ingen slutsats kan dras om $L = 1$.*

Bevis. Om $L < 1$ är $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergent enligt det tidigare kvotkriteriet. Därmed är också $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent.

Om $L > 1$ gäller att $|a_{k+1}/a_k| > 1$, dvs $|a_{k+1}| > |a_k|$, när k är stort. Därför kan termerna a_k inte gå mot 0 när $k \to 0$ och serien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergerar. ■

2 Potensserier

2.1 Allmänt om potensserier

En serie av formen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$, där x är en variabel och a ett tal, kallas en *potensserie* (kring a). Talen a_k (som antas kända) kallas seriens *koefficienter*. I potensserier är det viktigt att man startar indiceringen så att inga negativa potenser av x förekommer.

Det första problemet som dyker upp är att försöka bestämma för vilka x som serien kan summeras till ett tal: för vilka värden på x konvergerar serien?

Man kan tänka på potensserier som en generalisering av polynom. Seriens partialsummor är polynom med variabeln x. Generaliseringen består naturligtvis i att vi nu tillåter oss att ta med oändligt många termer. Nackdelen blir då förstås att vi inte kan vara säkra på att serien summerar till ett tal för givet x.

Vi har flera gånger under kursen råkat ut för att de elementära funktionerna inte räcker till för att genomföra kalkyler. Ur denna synvinkel kan vi tacksamt ta emot potensserier som ett nytt (och stort) tillskott av funktioner med definitionsmängd de x för vilka de konvergerar.

Sats 2.1 *Antag att $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ konvergerar för $x = x_0$. Då är serien också (absolut)konvergent för alla x sådana att $|x| < |x_0|$.*

Om vi ersätter x med $x-a$ i serien ser vi att om $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$ konvergerar för $x = x_0$, konvergerar den (absolut) när $|x-a| < |x_0 - a|$.

Bevis. Idén är att jämföra $\sum_k |a_k x^k|$ med en geometrisk serie.

Från förutsättningen får vi att $\lim_{k\to\infty} a_k x_0^k = 0$. Det betyder att talföljden $a_k x_0^k$ är begränsad. Låt oss säga att $|a_k x_0^k| < M$, för alla k.

Antag att $|x| < |x_0|$ och sätt $r = |x|/|x_0| < 1$. Vi har då att $|a_k x^k| = |a_k x_0^k| r^k < M r^k$. Eftersom $r < 1$ konvergerar den geometriska serien $M\sum_{k=0}^{\infty} r^k$ och därmed även den mindre (positiva) serien $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k x^k|$. ■

Av satsen följer det att ett av följande ömsesidigt uteslutande fall kan inträffa för en potensserie $\sum_k a_k(x-a)^k$:

1. Serien är absolutkonvergent för alla x,
2. det finns ett tal $R > 0$, så att serien är absolutkonvergent för alla x sådana att $|x-a| < R$ och divergent för alla x med $|x-a| > R$
3. serien konvergerar bara när $x = a$.

Talet R kallas seriens *konvergensradie* och det är brukligt att sätta $R = \infty$ i fall 1) och $R = 0$ i fall 2).

Om vi tänker på en potensserie $\sum_k a_k(x-a)^k$ som en funktion, är den alltså definierad för alla x sådan att $|x-a| < R$, där R är seriens konvergensradie. Den är definitivt inte definierad när $|x-a| > R$. Mängden (som bestäms av) $|x-a| < R$ är ett symmetriskt intervall runt a där ändpunkterna $a \pm R$ inte ingår. Beträffande ändpunkterna så kan ingen av dem, en men inte den andra eller båda ingå i potensseriens definitionsmängd. De x för vilka serien konvergerar kallas seriens *konvergensintervall.*

För bestämma en series konvergensradie kan man ofta använda kvotkriteriet för positiva serier. Beviset för följande sats utnyttjar det. Denna sats är av teoretiskt intresse och ska inte användas praktiskt; se det efterföljande exemplet!

Sats 2.2 *Om $|a_{n+1}/a_n| \to L$, när $n \to \infty$, så har potensserien $\sum_k a_k(x-a)^k$ konvergensradien $R = 1/L$.*

Här ska $1/L$ tolkas som $R = \infty$ när $L = 0$ och som $R = 0$, när $L = \infty$.

OBS! Det är i praktiken mycket bättre att använda kvotkriteriet i stället för sats 2.2, som i beviset nedan.

Bevis. Vi har, enligt förutsättningen, att $|a_{n+1}(x-a)^{n+1}/(a_n(x-a)^n)| = |a_{n+1}/a_n||x-a|$ har gränsvärdet $L|x-a|$.

Enligt kvotkriteriet har man absolutkonvergens när $L|x-a| < 1$, men inte när $L|x-a| > 1$.

Detta ger att konvergensradien är $R = 1/L$. ■

Exempel 2.1 *För vilka x konvergerar potensserien*

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{1-k^2}(x-2)^k?$$

Absolutbeloppet av kvoten av två på varandra följande termer är här

$$\left|\frac{(k+1)(x-2)^{k+1}}{1-(k+1)^2} \cdot \frac{1-k^2}{k(x-2)^k}\right| \quad = \quad \frac{k+1}{k} \cdot \frac{k^2-1}{k^2-2k} \cdot |x-2| \to |x-2|,$$

när $k \to \infty$. Kvotkriteriet ger (absolut)konvergens när $|x-2| < 1$ och divergens när $|x-2| > 1$, så konvergensradien är 1.

När $x = 1$ får vi den alternerande serien $\sum_{k=2}(-1)^k k/(1-k^2)$ med termer som avtar mot 0 och därför är konvergent.

När $x = 3$ får vi $-\sum_{k=2} k/(k^2-1)$. Eftersom $k/(k^2-1) > k/k^2 = 1/k$ och den positiva serien $\sum_{k=2} 1/k$ är divergent är potensserien divergent när $x = 3$ (enligt jämförelsekriteriet).

Potensserien konvergerar alltså när x ligger i intervallet $[1, 3[$ (som är seriens konvergensintervall (och definitionsmängd)). $\square$

Exempel 2.2 *Bestäm konvergensradien till*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 4^k (x-a)^{3k}.$$

Observera att i detta exempel är bara var tredje koefficient $\neq 0$, så kvoten av koefficienter $|a_{k+1}/a_k|$ saknar gränsvärde (är inte ens alltid definierad). Alltså är sats 2.2 inte användbar. Vi använder (som vanligt) kvotkriteriet och får att absolutbeloppet av kvoten av två på varandra följande termer är

$$\left|\frac{4^{k+1}(x-a)^{3(k+1)}}{4^k(x-a)^{3k}}\right|,$$

som har gränsvärdet $4|(x-a)|^3$ när $k \to \infty$. Enligt kvotkriteriet har vi konvergens när $4|(x-a)|^3 < 1$, dvs när $|(x-a)| < 4^{-1/3}$ och divergens när $4|(x-a)|^3 > 1$. Potensseriens konvergensradie är alltså $R = 4^{-1/3}$. $\square$

Exempel 2.3 *Bestäm konvergensradien till $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, där*

$$a_k = \begin{cases} 4^k & \textit{när } k \textit{ är jämnt} \\ 4^{-k} & \textit{när } k \textit{ är udda} \end{cases}$$

Även här saknar a_{k+1}/a_k (som är ömsom 1/16 ömsom 16) gränsvärde. Vi löser problemet genom att skriva $P(x)$ som en summa av två potensserier.

$$P(x) = \sum_k 4^{2k} x^{2k} + \sum_k 4^{-2k-1} x^{2k+1}$$

Här har $p_1(x) = \sum_k 4^{2k} x^{2k}$ konvergensradien 1/4, medan $p_2(x) = \sum_k 4^{-2k-1} x^{2k+1}$ har konvergensradien 4. Det betyder att $P(x)$ konvergerar när $|x| < 1/4$.

När $4 > |x| > 1/4$ divergerar $p_1(x)$, medan $p_2(x)$ konvergerar. Alltså kan inte $P(x)$ konvergera (för då hade $p_1(x) = P(x) - p_2(x)$ konvergerat) när $4 > |x| > 1/4$.

Potensserien $P(x)$ har alltså konvergensradien 1/4.

2.2 Derivering av potensserier

Som tidigare nämnts kan vi tänka på potensserier som ett tillskott till vårt förråd av funktioner. Det blir därför naturligt att fråga om dessa funktioner är deriverbara och om vi kan bestämma primitiva funktioner till dem.

Det visar sig att potensserier går utmärkt att derivera (inuti sina konvergensintervall). I själva verket går de att derivera hur många gånger som helst! För att förstå detta kan man använda följande sats upprepade gånger.

Sats 2.3 (Termvis derivering) *Antag att* $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *har konvergensradie* $R > 0$. *Då är* $P(x)$ *deriverbar när* $|x| < R$ *och*

$$P'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}.$$

Satsen innehåller (bland annat) påstendet att högra ledet i likheten ovan konvergerar när $|x| < R$. Den "termvisa derivatan" har alltså en konvergensradie som är minst lika stor som den ursprungliga potensserien. Om vi kombinarar sats 2.3 med sats 2.4 som vi ska visa senare ser vi att $P'(x)$ och $P(x)$ i själva verket har **samma konvergensradie**. I ändpunkterna till konvergensintervallet kan det däremot gå lite hur som helst. Det kan faktiskt till och med inträffa att potensserien $P'(x)$ är konvergent i en ändpunkt trots att potensserien $P(x)$ inte är det.

Genom att ersätta x med $x - a$ ser vi att vi också kan derivera $P(x-a) = \sum_k a_k (x-a)^k$ termvis. Derivatan blir $\sum_k k a_k (x-a)^{k-1}$.

För att visa satsen ska vi beräkna gränsvärdet av differenskvoten

$$\frac{P(x+h) - P(x)}{h} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{(x+h)^k - x^k}{h}$$

när $h \to 0$. Här stöter vi på patrull! Summan är definierad som ett gränsvärde, så vi har två olika gränsvärden staplade på varandra. När man har den situationen kan man inte utan vidare kasta om ordningen i vilken man tar gränsvärdena som följande exempel visar.

Exempel 2.4 *Vi har*

$$\lim_{x \to 0} \left(\lim_{y \to 0} \frac{y}{x+y} \right) = \lim_{x \to 0} 0 = 0,$$

men

$$\lim_{y \to 0} \left(\lim_{x \to 0} \frac{y}{x+y} \right) = \lim_{y \to 0} 1 = 1.$$

Vi delar upp beviset i tre steg.

Lemma 2.1 (Steg 1) *Om* $\sum_{k=0} a_k x^k$ *har konvergensradien* $R > 0$, *så är* $\sum_{k=1} k a_k x^{k-1}$, *(absolut)konvergent när* $|x| < R$.

Genom upprepad användning ser vi att även $\sum_{k=2} k(k-1) a_k x^{k-2}$ är konvergent när $|x| < R$.

Bevis. Välj ett r så att $|x| < r < R$. Eftersom $|x|/r < 1$ har vi att $(|x|/r)^{k-1}$ är en exponentiellt avtagande funktion av k. Detta ger att $k(|x|/r)^{k-1} \to 0$, när $k \to \infty$; en exponentialfunktion dominerar ju över ett polynom.

Följden $k(|x|/r)^{k-1}$ är alltså begränsad. Låt oss säga att $k(|x|/r)^{k-1} < M$, för alla k.

Vi får nu

$$k|a_k||x|^{k-1} = k|a_k| r^{k-1} \left(\frac{|x|}{r} \right)^{k-1} < M |a_k| r^{k-1}$$

Eftersom $0 < r < R$ är $\sum_k |a_k| r^{k-1} = (1/r) \sum_k |a_k| r^k$ konvergent. Jämförelsekriteriet ger nu att $\sum_{k=1} k a_k x^{k-1}$, är (absolut)konvergent när $|x| < R$. ■

Vi ska visa att satsen genom att visa att

$$(P(x+h) - P(x))/h - \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=2}^{\infty} a_k \left(\frac{(x+h)^k - x^k}{h} - k x^{k-1} \right)$$

har gränsvärdet 0, när $h \to 0$. Tricket är att försöka få ut ett h utanför serien så att serien som blir kvar är oberoende av h och konvergerar.

Det väsentliga steget är

Lemma 2.2 (Steg 2) *När* $k \geq 2$, *finns det ett tal* b *mellan* x *och* $x + h$, *så att*

$$\left| \frac{(x+h)^k - x^k}{h} - k x^{k-1} \right| < k(k-1)|h||b|^{k-2}.$$

Bevis. Medelvärdessatsen ger ett a mellan x och $x+h$, så att

$$\frac{(x+h)^k - x^k}{h} = ka^{k-1}$$

Samma sats ger ett b mellan x och a (och alltså mellan x och $x+h$), så att

$$\frac{(x+h)^k - x^k}{h} - kx^{k-1} = ka^{k-1} - kx^{k-1} = k(k-1)(a-x)b^{k-2}.$$

Eftersom a ligger mellan x och $x+h$ har vi $|x-a| < |h|$, och påståendet följer. ■

Bevis av sats 2.3 Antag att $|x| < R$ och välj ett r så att $|x| < r < R$. Vi kan förutsätta att h är så litet att $|x| + |h| < r$. Av detta följer att alla tal mellan x och $x+h$ har absolutbelopp $< r$.

Vi

$$Q = (P(x+h) - P(x))/h - \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=2}^{\infty} a_k \Big(\frac{(x+h)^k - x^k}{h} - kx^{k-1} \Big).$$

och från steg 2 har vi nu att

$$\Big| \frac{(x+h)^k - x^k}{h} - kx^{k-1} \Big| < |h| k(k-1) r^{k-2}.$$

Tillsammans ger detta

$$|Q| \leq \sum_{k=2}^{\infty} \Big| a_k \Big(\frac{(x+h)^k - x^k}{h} - kx^{k-1} \Big) \Big| < |h| \sum_{k=2}^{\infty} |a_k| k(k-1) r^{k-2}$$

Den sista serien är konvergent (och oberoende av h) enligt steg 1. Vi ser tillsist att $Q \to 0$, när $h \to 0$. ■

2.3 Potensserieutveckling av funktioner

Om man lyckas skriva en funktion $f(x)$ som en potensserie i en omgivning till (= öppet symmetriskt intervall kring) $x = 0$, $f(x) = \sum_k a_k x^k$, kallas potensserien för f:s Maclaurinserie. Om man på mosvarande sätt lyckas få $f(x) = \sum_k a_k (x-a)^k$ i en omgivning runt a kallas serien för f:s Taylorserie kring $x = a$. En Maclaurinserie är alltså en Taylorserie kring $x = 0$. I detta häfte kallar vi $f(x) = \sum_k a_k (x-a)^k$ en potensserieutveckling av $f(x)$.

I detta avsnitt ska vi se att våra **vanliga** elementära funktioner ofta kan skrivas som potensserier. Vi kommer flera gånger att använda symbolen $n!$, (där n är ett naturligt tal,) som betyder produkten av alla heltal $1, 2, \ldots n$, dvs $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$. Man brukar också sätta $0! = 1$ av praktiska skäl.

Vi passar på att notera att om $f(x) = \sum_k a_k (x-a)^k$ måste $f(x)$ ha derivator av varje ordning i (en omgivning till) $x = a$ eftersom detta gäller för potensserien. Derivering av $f(x) = \sum_k a_k (x-a)^k$ ger också $f^{(k)}(a) = k! a_k$, så att serien är helt bestämd av $f(x)$: $a_k = f^{(k)}(a)/k!$.

Vi har uppenbarligen $f(a) = \sum_k (f^{(k)}(a)/k!)(a-a)^k \ \Big(= (f^{(0)}(a)/0!)(a-a)^0 = a \Big)$.

Det finns emellertid på förhand ingen garanti för att $f(x) = \sum_k (f^{(k)}(a)/k!)(x-a)^k$ *i en omgivning* till $x = a$. Två saker är problematiska: dels kan det inträffa att potensserien har konvergensradie 0, dels kan $f(x)$ och potensserien ha olika värden utom för $x = a$ (även om den har positiv konvergensradie).

Vi ska använda följande teknik för att försöka uttrycka en given potensserie $P(x)$ med hjälp av elementära funktioner:

1. Visa att $P(x)$ löser en viss differentialekvation med begynnelsevärden,
2. lös differentialekvationen (med hjälp av elementära funktioner),
3. resultatet blir en identifiering av $P(x)$ med värdet av en elementär funktion när x ligger i det inre av P :s konvergensintervall.

2.3.1 Vanliga utvecklingar kring $x = 0$

Vi börjar med potensserien $P(x) = \sum_{k=0} x^k/k!$. Kvotkriteriet ger konvergensradien $R = \infty$. Potensserien är alltså (absolut)konvergent för alla x.

Termvis derivering ger $P'(x) = \sum_{k=1} x^{k-1}/(k-1)!$ (giltigt för alla x). Vi ser att $P'(x)$ faktiskt är $P(x)$, med annan indicering. Vi har alltså $P'(x) = P(x)$, så $P(x) = Ce^x$, för någon konstant C ($P(x)$ löser ju differentialekvationen $y'' - y = 0$).

Men $P(0) = 1$, så $P(x) = e^x$ (för alla värden på x). I ett slag har vi beräknat oändligt många (en för varje reellt tal x) oändliga summor! På köpet fick vi exponentialfunktionens Maclaurinserie.

$$\boxed{e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots \qquad \text{för alla } x}$$

Vi kan alltså också se resultatet som att vi gjort en omskrivning av exponentialfunktionen som en potensserie, vilket kan vara användbart i många sammanhang. Vi kan t.ex. beräkna ett närmevärde till $e = e^1$ genom att summera (t.ex.) de tio första termerna i serien efter vi satt $x = 1$.

Vi låter nu $P(x) = \sum_{k=0}(-1)^k x^{2k}/(2k)!$ och ser att $P'(x) = \sum_{k=1}(-1)^k x^{2k-1}/(2k-1)!$ och $P''(x) = \sum_{k=1}(-1)^k x^{2(k-1)}/(2(k-1))!$ som är $-P(x)$, med annan indicering. Detta ger $P''(x) = -P(x)$ och sedan $P(x) = A\cos x + B\sin x$.

Men $P(0) = 1$ och $P'(0) = 0$, så $A = 1$ och $B = 0$, så $P(x) = \cos x$. Detta är giltigt när x har $|x| < R$, där R är konvergensradien för $P(x)$.

Kvoten av absolutbeloppet av två på varandra följande termer i $P(x)$ är $|x^2|(2k+2)^{-1}(2k+1)^{-1}$ som har gränsvärdet 0, när $k \to \infty$. Detta ger att $P(x)$ har oändlig konvergensradie. Vi får alltså

$$\boxed{\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2k!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \cdots \qquad \text{för alla } x}$$

Derivering av detta ger $\sum_{k=1}(-1)^k x^{2k-1}/(2k-1)! = -\sin x$, för alla x. Ny indicering ger sedan

$$\boxed{\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots \qquad \text{för alla } x}$$

Innan vi går in på potensserieutveckling av potensfunktioner inför vi för ett reellt tal α och ett heltal $k \geq 0$ beteckningen

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!}, \qquad \binom{\alpha}{0} = 1$$

som generaliserar binomialkoefficienten $\binom{n}{k}$. En uträkning visar att

$$\binom{\alpha}{k}k + \binom{\alpha}{k-1}(k-1) = \alpha\binom{\alpha}{k-1}$$

och att detta leder till att

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k,$$

liksom $(1+x)^\alpha$, löser differentialekvationen $(1+x)y' = \alpha y,\ y(0) = 0$.

Ytterligare en beräkning visar att $P(x)$ har konvergensradien 1 så att

$$\boxed{(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{k}x^k + \cdots \qquad \text{när } |x| < 1.}$$

Detta generaliserar binomialsatsen till andra potenser än positiva heltal.

För att komma vidare behöver vi en konsekvens av satsen om termvisderivering (och jämförelsekriteriet) av generell karaktär.

Sats 2.4 (Termvis integration) *Om $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$ har konvergensradie R, så är*

$$\int P(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} + C$$

när $|x-a| < R$.

Bevis. Enligt sats en om termvis derivering är derivatan av högra ledet $P(x)$.

För att få påståendet om giltigheten att stämma måste vi visa att potensserien i högra ledet, kalla den tillfälligtvis $Q(x)$, är (absolut)konvergent när $|x-a|<R$, dvs att konvergensradien inte minskar vid termvis integration.

Vi vet att $P(x)$ är absolutkonvergent när $|x-a|<R$. Eftersom nu

$$Q(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^{k+1}/(k+1)=(x-a)\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k/(k+1).$$

och

$$\frac{|a_k||x-a|^k}{k+1}\leq |a_k||x-a|^k$$

ger jämförelsekriteriet att även $Q(x)$ absolutkonvergent när $|x-a|<R$. ■

För den geometriska summan har vi att

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1+x+x^2+\cdots+x^k+\cdots \qquad \text{när}|x|<1.$$

Ersätter vi x med $-x$ respektive $-x^2$ har vi också

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k = 1-x+x^2+\cdots+(-1)^k x^k+\cdots \qquad \text{när}|x|<1,$$

respektive

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k} = 1-x^2+x^4+\cdots+(-1)^k x^{2k}+\cdots \qquad \text{när}|x|<1,$$

Termvis integration ger nu

$$\ln(1+x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{k+1}}{k+1}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^k\frac{x^k}{k}+\cdots \qquad \text{när } |x|<1$$

och

$$\arctan x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+(-1)^k\frac{x^{2k}+1}{2k+1}+\cdots \qquad \text{när } |x|<1,$$

eftersom likheterna stämmer när $x=0$.

2.3.2 Utveckling kring andra punkter än 0

Vi visar hur utvecklingar kring $x=0$ kan användas för att bestämma potensserieutvecklingar kring andra punkter.

Exempel 2.5 *Bestäm potensserieutvecklingen av e^x kring $x=a$.*

Vi har från $e^t=1+t/1+t^2/2!+\cdots+t^k/k!+\cdots$ med $t=x-a$ att

$$e^x \;=\; e^a e^{x-a}=e^a+e^a(x-a)/1++e^a(x-a)^2/2!+\cdots+e^a(x-a)^k/k!+\cdots$$

□

Exempel 2.6 *Bestäm potensserieutvecklingen av $\cos x$ kring $x=a$.*

Vi har från $\cos t=1-t^2/2!+t^4/4!+\cdots+(-1)^k t^{2k}/(2k)!+\cdots$ och $\sin t=t/1!-t^3/3!+t^5/5!+\cdots+(-1)^k t^{2k+1}/(2k+1)!+\cdots$ att

$$\begin{aligned}\sin x &= \sin(a+(x-a))=\cos(a)\sin(x-a)+\sin(a)\cos(x-a)=\\ &= \sin(a)+\cos(a)(x-a)/1-\sin(a)(x-a)^2/2!-\cos(a)(x-a)^3/3!+\\ &\quad +\sin(a)(x-a)^4/4!+\cos(a)(x-a)^5/5!-\cdots\end{aligned}$$

$\square$

Exempel 2.7 *Bestäm potensserieutvecklingen av* $1/(1-x)$ *kring* $x = a \neq 1$.

Vi har den geometriska serien $1/(1-t) = 1 + t + t^2 + \cdots + t^k + \cdots$, när $|t| < 1$. Detta och omskrivningar ger

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= \frac{1}{1-a-(x-a)} = \frac{1}{1-a} \cdot \frac{1}{1-((x-a)/(1-a))} = \\ &= \frac{1}{1-a} + \frac{x-a}{(1-a)^2} + \frac{(x-a)^2}{(1-a)^3} + \cdots + \frac{(x-a)^k}{(1-a)^{k+1}} + \cdots, \end{aligned}$$

$\square$

Exempel 2.8 *Bestäm potensserieutvecklingen av* $\ln x$ *kring* $x = a > 0$.

Vi har $\ln(1+t) = t - t^2/2 + \cdots + (-1)^k t^k/k + \cdots$, när $|t| < 1$, så

$$\begin{aligned} \ln x &= \ln(a + (x-a)) = \ln a + \ln(1 + (x-a)/a) = \\ &= \ln a + \frac{x-a}{a} - \frac{(x-a)^2}{2a^2} + \cdots + (-1)^k \frac{(x-a)^k}{ka^k} + \cdots, \end{aligned}$$

när $|(x-a)/a| < 1$, dvs när $|x-a| < a$. $\square$

2.4 Exempel på användning av potensserier

Vi ska ge fyra olika exempel på hur potensserier kan användas. Vi ska

1. beräkna en series summa genom att känna igen den som värde av en potensserie,
2. beräkna gränsvärden på ett vetenskapligt vis, dvs metodiskt,
3. vi ska avgöra om en funktion har ett lokalt maximum eller minimum eller ingetdera i en given punkt och slutligen
4. lösa en differentialekvation genom att ansätta en potensserie som lösning.

2.4.1 En series summa

Idén är här att man ska känna igen en serie som ett värde av en potensserie som man sedan uttrycker med hjälp av elementära funktioner. Det sista steget kan fullbordas som i avsnitt 2.3, men det gäller att välja sin potensserie med omsorg för att klara det.

Exempel 2.9 *Avgör om serien* $\sum_{k=0}^{\infty} (4k+1)^{-1} 2^{-k}$ *konvergerar eller divergerar. Beräkna dess summa.*

Man ser lätt med jämförelsekriteriet och den geometriska summan $\sum_{k=0}^{\infty} (1/2)^k$ att serien konvergerar. Vi söker summan.

Om vi sätter $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (4k+1)^{-1} x^k$, så är den aktuella serien $P(1/2)$, men vi får problem att känna igen $P(x)$; den varken deriverar eller integrerar till något bekant.

Vi sätter därför istället $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (4k+1)^{-1} x^{4k+1}$, men nu är den aktuella serien i stället $2^{1/4} P(2^{-1/4})$. Vi försöker bestämma $P(x)$ med elementära funktioner och ser att $P(0) = 0$ och att $P'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{4k} = 1/(1-x^4)$, när $|x| < 1$.

Integration ger därför

$$\begin{aligned} P(x) &= \int \frac{1}{1-x^4}\,dx = \int \frac{1}{(1-x)(1+x)(1+x^2)}\,dx = \frac{1}{4} \int \Big(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} + \frac{2}{1+x^2} \Big)\,dx = \\ &= \frac{1}{4} \Big(\ln \Big(\frac{1+x}{1-x} \Big) + 2 \arctan x \Big) + C \end{aligned}$$

Från $P(0) = 0$ ser vi att $C = 0$, så

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+1)2^k} = 2^{1/4} P(2^{-1/4}) = \frac{1}{4} \Big(\ln \Big(\frac{1+2^{-1/4}}{1-2^{-1/4}} \Big) + 2 \arctan 2^{-1/4} \Big)$$

2.4.2 Gränsvärdesberäkningar

Idén här är att skriva om uttryck som ger obestämda uttryck när $x \to a$ som (kvot av) potensserier kring $x = a$. Här gäller det att känna till potensserieutvecklingar av de vanliga elementära funktionerna.

Exempel 2.10 *Beräkna gränsvärdet av*

$$\frac{\arctan(x^2) - x^2}{\cos(x^3) - 1},$$

när $x \to 0$.

Vi ser att gränsvärdet är av typen 0/0.

Vi har de kända utvecklingarna $\arctan t = t - t^3/3 + t^5/5 + \cdots$, och $\cos t = 1 - t^2/2! + t^4/4! +$ som ger oss

$$\begin{aligned}\frac{\arctan(x^2) - x^2}{\cos(x^3) - 1} &= \frac{(x^2 - x^6/3 + x^{10}/5 + \cdots) - x^2}{(1 - x^6/2! + x^{12}/4! + \cdots) - 1} = \frac{x^6/3 + x^{10}/5 + \cdots}{x^6/2! + x^{12}/4! + \cdots} = \\ &= \frac{-1/3 + x^4/5 + \cdots}{-1/2 + x^6/4! + \cdots} \to \frac{-1/3}{-1/2} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

när $x \to 0$. (Vid den näst sista likheten förkortade vi med x^6.)

2.4.3 Lokalt maximum, minimum eller ingetdera?

Antag att vi, för en given funktion $f(x)$, lyckat bestämma ett positivt heltal n så att $(f(x) - f(a))/(x - a)^n$ har ett gränsvärde $A \neq 0$, när $x \to n$. Då kommer $f(x) - f(a)$ att ha samma som eller motsatt teckenväxling med $(x - a)^n$ i a, beroende på om A är positivt eller negativt.

Om n är jämnt har i så fall $f(x) - f(a)$ ingen teckenväxling i a, eftersom $(x - a)^n$ inte har det. Detta ger att $f(x)$ har ett loklat maximum (om $A < 0$) eller ett loklat minimum (om $A > 0$) i $x = a$.

Om n är udda har under förutsättningarna ovan $f(x) - f(a)$ en teckenväxling i a eftersom $(x - a)^n$ har det. Det betyder att $f(x)$ varken har lokalt maximum eller minimum i $x = a$.

För att undersöka om $f(x)$ har ett lokalt maximum, minimum eller ingetdera i $x = a$ kan man alltså

1. (med potensserieutveckling) bestämma ett positivt heltal n så att $(f(x) - f(a))/(x - a)^n$ har ett gränsvärde $A \neq 0$ när $x \to a$,
2. av tecknet på A och pariteten på n avgöra vad som gäller.

Exempel 2.11 *Avgör om* $f(x) = e^{x^4} - 1 - x^2 \sin x^2$ *har ett lokalt maximum, minimum eller ingetdera när* $x = 0$.

Vi har med kända potensserieutvecklingar

$$\frac{f(x) - f(0)}{x^n} = \frac{(1 + x^4 + x^8/2! + \cdots) - 1 - x^2(x^2 - x^6/3! + \cdot)}{x^n} = \frac{(1/2! + 1/3!)x^8/3! + \cdots}{x^n} \to \frac{5}{12}$$

när $x \to 0$ och $n = 8$. Det betyder att $f(x) - f(0)$ har samma teckenväxling som x^8 i 0, dvs ingen. Alltså har $f(x)$ ett lokalt minimum i $x = 0$.

2.4.4 Potensserier och differentialekvationer

Idén är att givet en differentialekvation (med begynnelsevärden) söka en lösning av formen $y = \sum_k a_k x^k$ genom insättning i differentialekvationen. Detta ger sedan villkor på hur koefficienterna a_k ska se ut. Efter en utredning om detta återstår det att finna konvergensradien för potensserien för att veta för vilka x den är definierad.

Exempel 2.12 *Lös differentialekvationen* $xy'' + 2y' - xy = 1,\ y(0) = 1$.

Ekvationen är av andra ordningen men har inte konstanta koefficienter. Vi observerar att ekvationen ger $y'(0) = 1/2$. Ansätter lösningen $y = \sum_k a_k x^k$, ska vi därför har $a_0 = 1$ (från $y(0) = 1$) och $a_1 = 1/2$ (från $y'(0) = 1/2$).

Om vi sätter in potensserien i differentialekvationen får vi som koefficient framför x^k, när $k > 0$, i vänstra ledet

$$(k+1)ka_{k+1} + 2(k+1)a_{k+1} - a_{k-1}.$$

Enligt högra ledet ska detta vara 0, så vi får rekursionsformlen

$$a_{k+1} = \frac{a_{k-1}}{k^2+3k+2} = \frac{a_{k-1}}{(k+1)(k+2)}$$

som tillsammans med $a_0 = 1$ och $a_1 = 1/2$ leder till formeln $a_k = 1/(k+1)!$.

Det betyder att vår lösning är

$$y(x) = \frac{1}{1!} + \frac{x}{2!} + \cdots \frac{x^k}{(k+1)!} + \cdots = \frac{e^x - 1}{x},$$

som har konvergensradie ∞.

3 Taylorpolynom och approximation

Idén är att försöka approximera en funktion $f(x)$ med ett polynom $p_n(x)$ i närheten av en punkt $x = a$. Vi ska försöka göra detta genom att låta $p_n(x)$ ha samma derivator upp till ordning n som $f(x)$ i $x = a$. Detta polynom kallas Taylorpolynomet av grad n till $f(x)$ i punkten a. Samtidigt ska vi försöka hålla reda på vilket fel som uppstår när $f(x)$ ersätts med $p_n(x)$.

Eftersom derivatorna ska stämma upp till ordning n ser vi genast att

$$p_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Problemet som kvarstår är att förstå skillnaden mellan $f(x)$ och $p_n(x)$; hur väl approximerar polynomet funktionen?

Sats 3.1 *Antag att $f(x)$ har kontinuerlig derivata av ordning $n+1$ i en omgivning till a . När x ligger i denna omgivning gäller då att*

$$f(x) = p_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

för något tal θ mellan x och a.

Bevis. För att slippa en oväsentlig men komplicerande detalj i beviset ska vi bara genomföra det underförutsättning att $x > a$. Beviset bygger på upprepad partiell integration. Låt x vara fixt.

$$\begin{aligned}
f(x) - f(a) &= \int_a^x f'(t)\,dt = \\
&= [-(x-t)f'(t)]_a^x + \int_a^x (x-t)f''(t)\,dt = \\
&= (x-a)f'(a) + [(-(x-t)^2/2)f''(t)]_a^x + \int_a^x ((x-t)^2/2)f^{(3)}(t)\,dt = \\
&= (x-a)f'(a) + ((x-a)^2/2)f''(a) + [(-(x-t)^3/3!)f^{(3)}(t)]_a^x + \int_a^x ((x-t)^3/3!)f^{(4)}(t)\,dt
\end{aligned}$$

Upprepning ger nu

$$f(x) = p_n(x) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Enligt förutsättningen är $f^{(n+1)}$ kontinuerlig mellan a och x och antar därför ett största värde M och ett minsta värde m i intervallet mellan a och x, så att $m \leq f^{(n+1)}(t) \leq M$.

Om vi multiplicerar med $(x-t)^n/n!$, som är ≥ 0 när t ligger mellan a och x, får vi att

$$m\frac{(x-t)^n}{n!} \leq \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \leq M\frac{(x-t)^n}{n!}.$$

Integration från a till x ger nu

$$m\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \leq \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt \leq M\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Division med $I = (x-a)^{n+1}/(n+1)!$, som är positivt, ger nu

$$m \leq \frac{1}{I}\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt \leq M.$$

Enligt satsen om mellanliggande värden finns nu ett θ mellan a och x, så att mellanledet är $f^{(n+1)}(\theta)$ och vi får

$$\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt = If^{(n+1)}(\theta) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

■

3.1 Uppgifter

1. Beräkna summan av serien
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k+4^k}{5^k}.$$

2. Visa att $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^p}$ är konvergent när $p > 1$, men divergent när $0 < p \leq 1$.

3. Visa att $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a}{a^2+k^2}$, där a är en konstant > 0, är konvergent.

4. Vilka av följande serier är konvergenta?
$$\text{(a)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{k^2\sqrt{k+1}} \quad \text{(b)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+\sin 3k}{k\sqrt{k}} \quad \text{(c)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k+k^2}{4^k+1} \quad \text{(d)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{10^k}{k!}.$$

5. Vilka av följande serier är konvergenta?
$$\text{(a)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{e^k} \quad \text{(b)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k\sqrt{k}} \quad \text{(c)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\ln k}{k} \quad \text{(d)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{(3k)!}.$$

6. Vilka av följande serier är konvergenta?
$$\text{(a)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\ln k} \quad \text{(b)} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k\frac{k+1}{2k} \quad \text{(c)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}).$$

7. Vilka av följande serier konvergerar? Vilka är absolutkonvergenta?
$$\text{(a)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k} \quad \text{(b)} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k\frac{\ln k}{k} \quad \text{(c)} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k^2} \quad \text{(d)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-k^2}.$$

8. Bestäm konvergensradien till
$$\text{(a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k}}{2^k} \quad \text{(b)} \sum_{k=0}^{\infty} 5^{(-1)^k}x^k \quad \text{(c)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k!)^3}{(3k)!}x^k \quad \text{(d)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k^2}}{k!} \quad \text{(e)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}x^k.$$

9. För vilka värden på x konvergerar potensserien

$$\text{(a)} \sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k}x^{2k} \quad \text{(b)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{2^k(k^2+1)}x^k \quad \text{(c)} \sum_{k=0}^{\infty} k!x^k$$
$$\text{(d)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^k} \quad \text{(e)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k2^k} \quad \text{(f)} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{5^k\sqrt{k}}?$$

10. Utveckla följande funktioner som potensserie kring $x = 0$ och ange för vilka x som utvecklingarna gäller.

$$\text{(a)} \ \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{(b)} \ \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{(c)} \ xe^x \quad \text{(d)} \ f(x) = \frac{e^x - 1}{x} \text{ när } x \neq 0 \text{ och } f(0) = 1$$

$$\text{(e)} \ \ln\sqrt{1+x^2} \quad \text{(f)} \ (1-x^2)\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \quad \text{(g)} \ \sin^2 x.$$

11. Beräkna summan av serien

$$1 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^9}{9} + \cdots.$$

För vilka x konvergerar serien?

12. Bestäm konvergensradien för serien

$$1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^9}{9!} + \frac{x^{12}}{12!} + \cdots$$

och visa att den löser differentialekvationen $y'' + y' + y = e^x$. Beräkna seriens summa (med hjälp av elementära funktioner).

13. Visa att serien

$$y = 1 + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^8}{8!} + \cdots$$

löser differentialekvationen $y'' - y = -\cos t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Bestäm seriens summa. För vilka t är den konvergent?

14. Beräkna

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k k(k-1)}.$$

15. Låt

$$P(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\cos(i\pi/3)}{i!}x^i.$$

Bestäm konvergensradien för $P(x)$ och visa att $P(x)$ löser differentialekvationen $y'' - y' + y = 0$. Uttryck $P(x)$ med hjälp av elementära funktioner (för x i konvergensintervallet).

16. Avgör om serien

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)3^k}$$

konvergerar. Bestäm i så fall dess summa.

17. Avgör om serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k(2k-1)9^k}$$

konvergerar. Bestäm i så fall dess summa.

18. Visa att

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2 + (-1)^{k+1})x^{2k}}{(2k)!}$$

löser differentialekvationen $y'' - y = 2\cos(x)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ och beräkna serien

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2 + (-1)^{k+1}}{(2k)!}.$$

19. Låt

$$p(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-2)^n}{1+n} x^{2n}.$$

För vilka värden på x är $p(x)$ konvergent. Uttryck $p(x)$ med hjälp av elementära funktioner i det inre av konvergensintervallet.

20. Avgör om

$$f(x) = \frac{1+\arctan(x^2)}{e^{x^2}}$$

har ett lokalt extremvärde eller ej i $x = 0$.

21. Bestäm konstanten a så att gränsvärdet

$$\lim_{x \to 0} \frac{xe^{x^2} + a \tan x}{x^2 \ln(1+x)}$$

existerar. Bestäm sedan gränsvärdet.

22. Bestäm konstanten a så att gränsvärdet

$$\lim_{x \to 0} \frac{24\cos(x^2)e^{x^3} + ax^3 - 24}{x^3 \ln(1+x)}$$

existerar. Bestäm sedan gränsvärdet.

23. Lös differentialekvationen

$$xy'' + 2y' - xy = 1, \; y(0) = 1.$$

Uttryck lösningen med elementära funktioner.

24. Lös differentialekvationen

$$4xy'' + 2y' + y = 0, \; y(0) = 1.$$

Uttryck lösningen med elementära funktioner.

25. Avgör om

$$\frac{x^3 - \sin(x^3)}{1 + x\cos x}$$

har ett lokalt maximum eller minimum i $x = 0$.

26. Avgör om

$$\frac{e^{x^2}\cos(\sqrt{2}x) - 1}{1 + \sin(3x)}$$

har ett lokalt maximum eller minimum i $x = 0$.

27. Bestäm Taylorpolynomet av ordning

(a) tre till $f(x) = (1+2x)^{-1}$ kring punkten $x = 0$,
(b) nio kring $x = 0$ till funktionen $f(x) = (1-x^3)^{-1}$,
(c) fyra till $\cos(2x)$ kring $x = 0$,
(d) fem till $f(x) = x\cos(x)$ kring punkten $x = 0$,
(e) fyra till $f(x) = e^x/x$ kring punkten $x = 1$
(f) tre till $f(x) = \ln(x)\cos(x)$ kring punkten $x = 2$.

4 Svar till uppgifterna

1. 15/2.

4. Alla är konvergenta.

5. (a), (b) och (d).

6. (a) och (c).

7. (a) Divergerar (b) Konvergerar (c) Konvergerar (d) Absolutkonvergent.

8. (a) $2^{1/3}$ (b) 1 (c) 27 (d) 1 (e) 4.

9. (a) $|x| < \sqrt{3}$ (b) $-2 < x \leq 2$ (c) $x = 0$ (d) Alla x (e) $-2 \leq x < 2$ (f) $|x| \leq \sqrt{5}$

10. (a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$, alla x (b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$, alla x (c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k!}$, alla x (d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!}$, alla x (e) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k}}{2k}$, $|x| \leq 1$ (f) $-2x + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{4k^2-1}$, $|x| < 1$ (g) $\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2x)^{2k}}{(2k)!}$, alla x

11. $1 - \ln(1-x^3)/3$, $-1 \leq x < 1$.

12. Summan är $e^x/3 + 2e^{-x/2}\cos(\sqrt{3}x/2)/3$, för alla x.

13. $y(t) = (\cosh t + \cos t)/2$ för alla t.

14. $(1 - \ln 2)/2$.

15. Konvergensradien är ∞ och $P(x) = e^{x/2}\cos\sqrt{3}x/2$.

16. $\sqrt{3}\pi/6$.

17. $-3^{-1}\arctan(3^{-1}) - 2^{-1}\ln(0.9)$.

18. $2\cosh 1 - \cos 1$.

19.
$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+2x^2)}{2x^2} - 1 + 2x^2 & \text{när} \quad 0 < |x| < 1/\sqrt{2} \\ 0 & \text{när} \quad x = 0. \end{cases}$$

20. Lokalt maximum.

21. $a = -1$ och gränsvärdet blir 2/3.

22. $a = -24$ och gränsvärdet blir 12.

23. $y = (e^x - 1)x^{-1}$

24. $y = \cos(\sqrt{x})$

25. Varken lokalt minimum eller maximum

26. Lokalt maximum

27. (a) $1 - 2x + 4x^2 - 8x^3$ (b) $1 + x^3 + x^6 + x^9$ (c) $1 - 2x^2 + 2x^4/3$
(d) $x - x^3/2 + x^5/24$ (e) $e + e(x-1)^2/2 - e(x-1)^3/3 + 3e(x-1)^4/8$
(f) $(\ln 2)^2 + \ln 2(x-2) + (1-\ln 2)(x-2)^2/4 + (2\ln 2 - 3)(x-2)^3/24$.