

# Tentamen i Matematisk analys i en variabel för I1, MVE 015

2008 03 29 kl. 8.30–12.30.

Hjälpmedel: Inga, ej räknedosa.

Telefon: , 0762 72 18 60

Lärares närvaro i sal: 9.30 och 11.30

Obs! Ange utbildningsprogram och antagningsår samt namn och personnummer.

1. (a) Beräkna  $\int \cos \sqrt{x} dx$  (b) Beräkna  $\int_0^1 |\ln x| dx$  om den konvergerar. (4p+4p)  
Motivera annars att den är divergent.

2. Lös differentialekvationen

$$y'' + 4y' + 5y = e^{-2x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \quad (6p)$$

3. Beräkna gränsvärdet  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \ln(1+x^2) - \cos x}{x \sin x - x^2}$  (6p)

4. Beräkna volymen av den kropp som uppstår då området  $0 \leq y \leq e^{-x^2}$  roterar kring  $y$ -axeln. (6p)

5. Bestäm alla kurvor i planet som har den egenskapen att tangenten i en punkt  $(x, y)$  skär  $x$ -axeln i punkten  $(-x, 0)$ . (6p)

6. Bestäm konvergensområdet för potensserien  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}(3^{-n} + 2^{-n})x^{3n}$  (6p)

7. Definiera vad som menas med att en serie  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  är (6p)

(a) konvergent

(b) absolutkonvergent.

(c) Ge ett exempel på en serie som är konvergent men inte absolutkonvergent.

8. Antag att  $f$  är kontinuerlig på ett intervall  $I$  och att  $a \in I$ . Visa att (6p)  
 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  är deriverbar på  $I$  och bestäm derivatan  $F'(x)$ .

Formelsamling finns på baksidan.

Lycka till!

SJ

## Trigonometriska formler

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x + y) + \sin(x - y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x + y) + \cos(x - y)]$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x - y) - \cos(x + y)]$$

## Maclaurinserier

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots \quad \text{för alla } x$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \quad \text{för alla } x$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \quad \text{för alla } x$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \quad \text{för } -1 < x \leq 1$$

$$\frac{1}{(1-x)} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad \text{för } -1 < x < 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \quad \text{för } -1 \leq x \leq 1$$

$$(1+x)^p = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{p}{k} x^k = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!} x^2 + \dots \quad \text{för } -1 < x < 1$$