Tentamen i Matematisk analys i en variabel för I1, MVE015

2008 12 18 kl. 8.30–12.30.

Hjälpmedel: Inga, ej räknedosa. Formelsamling finns på baksidan.
Telefon: Martin Berglund, 0762 72 18 60
För godkänt krävs minst 20 poäng. Betyg 3: 20-29 poäng, betyg 4: 30-39 poäng, betyg 5: 40-50 poäng.
Bonuspoäng från hösten 2008 ingår.
Besked om rättningen lämnas på kursens hemsida :
www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/mve015/0708/
Skriv program och inskrivningsår på omslaget, skriv personliga koden på samtliga inlämnade papper.

---

1. (a) Beräkna $\int x^3 \sin(x^2) dx$. (4p)

   (b) Beräkna $\int_0^\infty \frac{1}{1+e^{2x}} dx$ om den konvergerar. Motivera annars att den är divergent. (5p)

2. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' + y' = x$ som uppfyller begynnelsevillkoret $y(0) = y'(0) = 0$. (6p)

3. (a) Bestäm Maclaurinutveckingarna av grad 6 till funktionerna $\sin(x^2)$ och $\cos(x^3)$. Resttermer på "stort ordo"-form räcker. (4p)

   (b) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2) - x^2}{\cos(x^3) - 1}$. (2p)

4. Beräkna längden av kurvan $(x, y) = t^2(\cos t, \sin t)$, $\quad 0 \le t \le 2$. (6p)

5. Undesök om serierna konvergerar eller ej. (6p)

   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{1+2^n}$. (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{1+n^2}$. (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{1+n^2}$. (6p)

6. Lös integralekvationen $y(x) = a + \int_0^x \frac{(y(t))^2}{1+t^2} dt$, där (a) $a = \frac{2}{\pi}$ (b) $a = 0$. (6p)

7. (a) Formulera medelvärdessatsen för integraler och definiera vad som menas med medelvärdet av en funktion på ett intervall. (3p)

   (b) Använd denna sats för att bevisa att $\lim_{x\to\infty} \int_x^{x+2} \arctan t \, dt = \pi$. (3p)

8. Visa att om potensserieen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergerar för $x = x_0$ så konvergerar den för alla x med $|x| < |x_0$. (5p)

Lycka till! /SJ

Trigonometriska formler

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

$$2 \sin x \cos y = \sin(x+y) + \sin(x-y)$$

$$2 \sin x \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$$

$$2 \cos x \cos y = \cos(x-y) + \cos(x+y)$$

En primitiv funktion

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\xi}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos \xi$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos \xi$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \ldots + \binom{\alpha}{n} x^n + \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} (1+\xi)^{\alpha-n-1}$$

I alla utvecklingarna är ξ ett tal mellan 0 och x.

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$$