# Tentamen i Matematisk analys i en variabel för I1, MVE015

2009 08 26 kl. 8.30–12.30.

Hjälpmedel: Inga, ej räknedosa. Formelsamling finns på baksidan.
Telefon: Karin Kraft, 0762 72 18 61
För godkänt krävs minst 20 poäng. Betyg 3: 20-29 poäng, betyg 4: 30-39 poäng, betyg 5: 40-50 poäng.
Bonuspoäng från hösten 2008 ingår.
Lösningar och besked om rättningen lämnas på kursens hemsida :
www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/mve015/0809/
Skriv program och inskrivningsår på omslaget, skriv personliga koden på samtliga inlämnade papper.

---

1. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $y' - y = e^{2x}$. (6p)

2. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y' = x^3 y$ (6p)
   som uppfyller begynnelsevillkoret $y(1) = 1$.

3. Lös begynnelsevärdesproblemet (6p)
   $y'' + y' - 2y = e^{4x}, \quad y(0) = \frac{1}{9}, \quad y'(0) = \frac{4}{9}$.

4. (a) Beräkna $\displaystyle\int_{-1}^{0} 2x \arctan x \, dx$. (4p)

   (b) Beräkna $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}+2}} \, dx$. (4p)

5. Betrakta funktionen $f(x) = (1 - \cos x^3) \ln(1 + x^3)$. (6p)

   (a) Bestäm Maclaurinpolynomet av grad 9 till $f$.

   (b) Beräkna derivatorna $f^{(n)}(0)$ för $1 \leq n \leq 9$.

6. Kalkylen (6p)

$$\int_{-1}^{1} \frac{2}{(2x+1)^2} \, dx = \left[ -\frac{1}{2x+1} \right]_{-1}^{1} = -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3}$$

   är uppenbarligen felaktig, eftersom integranden är positiv. Vad är felet?
   Hur borde man ha behandlat integralen och vad blir resultatet?

7. Bevisa att en absolutkonvergent serie är konvergent. (6p)

8. Bevisa entydighetssatsen för Maclaurinutvecklingar: (6p)
   Om $f(x) = q_n(x) + O(x^{n+1})$ där $q_n(x)$ är ett polynom av grad $n$ så är $q_n(x)$ lika med maclaurinpolynomet till $f$ av grad $n$.

Lycka till! /SJ

## Trigonometriska formler

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

$$2 \sin x \cos y = \sin(x+y) + \sin(x-y)$$

$$2 \sin x \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$$

$$2 \cos x \cos y = \cos(x-y) + \cos(x+y)$$

## En primitiv funktion

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C$$

## Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\xi}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos \xi$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos \xi$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \ldots + \binom{\alpha}{n} x^n + \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} (1+\xi)^{\alpha-n-1}$$

I alla utvecklingarna är $\xi$ ett tal mellan $0$ och $x$.

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$$

# Lösningar till Matematisk analys i en variabel för I1, MVE015

2009 08 26 kl. 8.30–12.30.

1. Multiplicera med inegrerande faktor: $e^{-x}y' - e^{-x}y = e^x$. Detta kan skrivas $(e^{-x}y)' = e^x$. Integrera: $e^{-x}y = e^x + c$ dvs $\underline{y = e^{2x} + ce^x}$.

2. Separera: $\dfrac{dy}{y} = x^3 dx$. Integrera: $\ln|y| = \dfrac{x^4}{4} + c$, dvs $y = \pm e^c e^{x^4/4} = Ce^{x^4/4}$.
   $y(1) = 1$ ger $C = e^{-1/4}$ och $\underline{y = e^{(x^4-1)/4}}$.

3. Karaktäristisk ekvation: $0 = r^2 + r - 2 = (r-1)(r+2)$ som ger homogenlösningen $y_h = C_1e^x + C_2e^{-2x}$. Partikulärlösning: Ansätt $y_p = ae^{4x}$ och sätt in i ekvationen. Det ger $(16+4-2)ae^{4x} = e^{4x}$, dvs $a = 1/18$. Allmän lösning: $y = C_1e^x + C_2e^{-2x} + e^{4x}/18$.
   Eftersom $y' = C_1e^x - 2C_2e^{-2x} + 2e^{4x}/9$ så ger begynnelsevärdena ekvationssystemet
   $\begin{cases} C_1 + C_2 &= 1/18 \\ C_1 - 2C_2 &= 2/9 \end{cases}$ som har lösningen $C_1 = 1/9$ och $C_2 = -1/18$.
   Svar: $\underline{y = (2e^x - e^{-2x} + e^{4x})/18}$

4a. $\displaystyle\int_{-1}^{0} 2x\arctan x\,dx = [PI] = \Big[x^2\arctan x\Big]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0}\frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4} + \int_{-1}^{0}\frac{1}{1+x^2} - 1\,dx =$
   $\displaystyle= \frac{\pi}{4} + \Big[\arctan x\Big]_{-1}^{0} - 1 = \underline{\frac{\pi}{2} - 1}$

4b. Substitutionen $t = \sqrt{x} + 2$ dvs $x = (t-2)^2$ och $dx = 2(t-2)dt$ ger integralen
   $\displaystyle\int_3^4 2t^{-1/2}(t-2)\,dt = \int_3^4 2t^{1/2} - 4t^{-1/2}\,dt = \Big[\frac{4}{3}t^{3/2} - 8t^{1/2}\Big]_3^4 = \underline{4\sqrt{3} - 16/3}.$

5. $f(x) = \Big[1 - \Big(1 - \dfrac{x^6}{2} + O(x^{12})\Big)\Big]\Big(x^3 + O(x^6)\Big) = \dfrac{x^9}{2} + O(x^{12})$. Detta visar att $P_9(x) = \dfrac{x^9}{2}$ och därmed är $\underline{f^{(n)}(0) = 0 \text{ för } n = 1, 2, ..., 8}$, medan $\dfrac{f^{(9)}(0)}{9!} = \dfrac{x^9}{2}$ dvs $\underline{f^{(9)}(0) = 9!/2}(= 181440)$.

6. Felet är att integranden ej är kontinuerlig i hela intervallet utan har en singularitet för $x = -1/2$.
   Man måste dela upp den i 2 generaliserade integraler: $\displaystyle\int_{-1}^{-1/2}\frac{2}{(2x+1)^2}\,dx + \int_{-1/2}^{1}\frac{2}{(2x+1)^2}\,dx.$
   Båda dessa integraler är dock divergenta eftersom
   $\displaystyle\lim_{x\to -1/2^-} -\frac{1}{2x+1} = -\lim_{x\to -1/2^+} -\frac{1}{2x+1} = \infty$