(1) a) $\int \cos\sqrt{x}\, dx = \left[\begin{matrix} t=\sqrt{x} \\ dx = 2t\,dt \end{matrix}\right] = \int 2t \cos t\, dt = \left[\begin{matrix} \text{part.} \\ \text{int.} \end{matrix}\right] =$

$= 2t\sin t - \int 2\sin t = 2t\sin t + 2\cos t + C =$

$= \underline{2\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x} + C}$

b) $= \int_0^1 |\ln x|\, dx = -\int_0^1 \ln x\, dx = [x - x\ln x]_0^1 = 1$ ty

$x\ln x \to 0$ då $x \to 0$

(2) Kar. ekv: $0 = r^2 + 4r + 5 = (r+2)^2 + 1$, $r = -2 \pm i$

$y_h = e^{-2x}(A\cos x + B\sin x)$

$y_p = a e^{-2x}$, $y_p' = -2a e^{-2x}$, $y_p'' = 4a e^{-2x}$ $\Rightarrow$

$(4a + 4(-2a) + 5a)\, e^{-2x} = e^{-2x}$, dvs $a = 1$

Allmän lösning: $y = e^{-2x}(A\cos x + B\sin x + 1)$

$y' = e^{-2x}(-A\sin x + B\cos x - 2(A\cos x + B\sin x + 1))$

$y(0) = 0$ ger $A = -1$

$y'(0) = 0$ ger $B = 0$

Svar: $\underline{\underline{y = e^{-2x}(1 - \cos x)}}$

(3) $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + O(t^3)$

$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + O(x^6)$

$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + O(t^3)$

$\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + O(x^6)$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6)$

Täljaren $= \frac{x^4}{3} + O(x^6)$

Nämnaren $= x\left(x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)\right) - x^2 = -\frac{x^4}{6} + O(x^6)$

Kvoten $= \dfrac{x^4/3 + O(x^6)}{-x^4/6 + O(x^6)} = \dfrac{1/3 + O(x^2)}{-1/6 + O(x^2)} \to \underline{\underline{-2}}$ då $x \to 0$

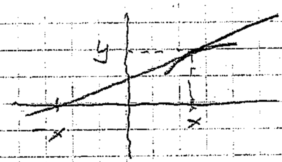
(4) Med "ringformeln" för vi

$\Delta V = 2\pi x f(x)\, dx$ och

$V = 2\pi \int_0^\infty x e^{-x^2} dx = \left[\begin{matrix} t = x^2 \\ 2x\,dx = dt \end{matrix}\right] =$

$= \pi \int_0^\infty e^{-t} dt = \pi \left[-e^{-t}\right]_0^\infty = \pi(0 - (-1)) = \underline{\underline{\pi}}$

(5) Ur fig: $y' = \frac{y}{2x}$



$2\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$

Integrera:

$\ln|x| = 2\ln|y| + C_1 = \ln y^2 + C_1$

$|x| = e^{\ln y^2 + C_1} = e^{C_1} y^2$

dvs $x = \pm e^{C_1} y^2 = \underline{C y^2}$ där $C \neq 0$.

Även $x = 0$ uppfyller villkoret!

Svar: Alla parabler $x = Cy^2$.

(6) Sätt $x^3 = t$ och bestäm först konvergensområdet

för $\sum_1^\infty a_n t^n$ där $a_n = \frac{1}{n}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n}{n+1} \cdot \dfrac{\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{3^n} + \frac{1}{2^n}} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + 1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1} \to$

$\to \frac{1}{2}$ då $n \to \infty$. Konvergensradie $R = 2$.

$t = 2$ ger $a_n 2^n = \frac{1}{n}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1\right)$

och $\frac{a_n 2^n}{1/n} \to 1$. Eftersom $\sum_1^\infty \frac{1}{n}$ är divergent

så är också $\sum_1^\infty a_n 2^n$ divergent.

$\sum a_n (-2)^n$ är dock konvergent enligt Leibnitz

ty $|a_n(-2)^n| = \frac{1}{n}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1\right)$ som avtar mot 0.

$-2 \le t < 2 \Leftrightarrow -2 \le x^3 < 2 \Leftrightarrow \underline{-2^{1/3} \le x < 2^{1/3}}$

Vilket alltså är konv. omr.