① a) $\int x^2(12+x^3)^{19}dx = \frac{1}{60}(12+x^3)^{20}+C$.

b) $\int (2x+1)\ln(1+x)\,dx = (x^2+x)\ln(1+x) - \int \frac{x^2+x}{x+1}dx =$

$= (x^2+x)\ln(1+x) - \frac{x^2}{2} + C$

c) $\int \frac{1}{2x+x^2}dx = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2+x}\right)dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{2+x}\right| + C$

---

② Kar. ekv. r^2+2r+5 med rötter $r=-1\pm 2i$.

Homogenlösn: $y_h = e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$

Part. lösn.: $y_p = 1$, dvs Allmän lösning är

$y = e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x) + 1$. $y(0)=1$ ger $A=0$ dvs

$y = Be^{-x}\sin 2x + 1$. Då är $y' = Be^{-x}(2\cos 2x - \sin 2x)$

och $y'(0)=1$ ger $B = 1/2$.

Svar: $y = \frac{1}{2}e^{-x}\sin 2x + 1$

---

③ $xe^{-x} = x\left(1-x+\frac{x^2}{2}+x^3B(x)\right)$ $x - x^2 + \frac{x^3}{2} + O(x^4)$

$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + O(t^4)$. Då är

$\ln(1+xe^{-x}) =$ (potenser av x över 4 går in i $O(x^4)$)

$= x - x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{1}{2}(x-x^2)^2 + \frac{1}{3}x^3 + O(x^4)$

$= x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 + O(x^4)$. $P_3(x) = x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3$

---

④ Division med x: $y' + \left(\frac{1}{x}-1\right)y = \frac{1}{x}$, $x>0$

Int. faktor: $e^{\int(\frac{1}{x}-1)dx} = e^{\ln x - x} = xe^{-x}$. Vi får

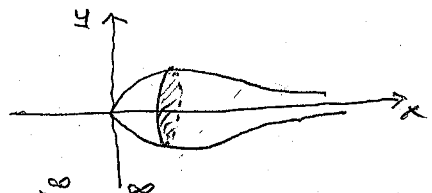
$(xe^{-x}y)' = e^{-x}$ och $xe^{-x}y = C - e^{-x}$

Allmän Lösning: $y = \frac{1}{x}(Ce^{x}-1)$

$|y| \to \infty$ om $C \neq 1$, men $y \to 1$ om $C=1$.

Svar $y = \frac{e^x - 1}{x}$

⑤ Volymen är



$\int_0^\infty \pi(f(x))^2dx =$

$= \pi\int_0^\infty x^2e^{-2x}dx = \pi\left(\left[-\frac{x^2}{2}e^{-2x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty xe^{-2x}dx\right) =$

$= \pi\left(0 + \left[-\frac{x}{2}e^{-2x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{2}e^{-2x}dx\right) =$

$= \pi\left(0 + 0 + \left[-\frac{1}{4}e^{-2x}\right]_0^\infty\right) = \pi\left(0+\frac{1}{4}\right) = \pi/4$

---

⑥ $xy''+y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$. Med

$y = a_0 + a_1x + a_2x^3 + a_3x^3 + a_4x^4 + O(x^5)$ får vi

$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + O(x^4)$ och

$xy'' = 2a_2x + 6a_3x^2 + 12a_4x^3 + O(x^4)$. Då är

(*) $xy''+y = a_0 + (a_1+2a_2)x + (a_2+6a_3)x^2 + (a_3+12a_4)x^3 + O(x^4)$

$y(0)=0$, $y'(0)=1$ ger $a_0=0$ och $a_1=1$

$xy''+y=0$ ger alla koeff. i (*) $=0$ och därmed

$a_2 = -\frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{12}$, $a_3 = -\frac{1}{144}$.

Svar $y = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{12} - \frac{x^4}{144} + O(x^5)$

Lösningar till Analys i en variabel för I 1, MVE015, 08 08 22