# Lösningar till MVE015 081218

**1** a) $\int x^3 \sin x^2\,dx = \left[\begin{matrix} t=x^2 \\ x\,dx = \frac12 dt\end{matrix}\right] = \frac12 \int t \sin t\,dt =$

$= [P.I.] = -\frac12 t\cos t + \frac12\int \cos t = \frac12(-t\cos t + \sin t) =$

$= \frac12(\sin x^2 - x^2\cos x^2)$

b) $\int_0^\infty \frac{1}{1+e^{2x}}\,dx = \left[\begin{matrix} t=e^{2x},\ x=\frac12\ln t\\ dx = \frac{1}{2t}dt\end{matrix}\right] = \frac12\int_1^\infty \frac{1}{t(t+1)}\,dt =$

$= [P.U.] = \frac12\int_1^\infty\left(\frac1t - \frac1{t+1}\right)dt = \frac12\left[\ln\frac{t}{1+t}\right]_1^\infty = \frac12\ln 2$

---

**2** Integr. faktor: $e^x$. Mult. med $e^x$ ger

$(y'e^x)' = xe^x$ Integrera:

$y'e^x = \int xe^x\,dx = [P.I.] = (x-1)e^x + C_1$

$y' = (x-1) + C_1 e^{-x}$. Integrera igen

$y = \frac{x^2}{2} - x + C_2 - C_1 e^{-x}$

$y'(0)=0$ ger $C_1 = 1$, $y(0)=0$ ger $C_2=1$

$y = \frac{x^2}{2} - x + 1 - e^{-x}$

(Alt: Kar. ekv. har rötter 0 och 1 $\Rightarrow y_h = A + Be^{-x}$
Ansätt $y_p = x(ax+b) \Rightarrow y_p = \frac{x^2}{2} - x$, o.s.v.)

---

**4** $L = \int_0^2 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt = \dots\dots = \int_0^2 t\sqrt{4+t^2} = \left[\begin{matrix}x=4+t^2\\dx=2t\,dt\end{matrix}\right] =$

$= \frac12\int_4^8 \sqrt{x}\,dx = \frac13\left[x\sqrt x\right]_4^8 = \frac83(2\sqrt2 - 1)$

**3** a) $\sin t = t - \frac{t^3}{6} + O(t^5) =$

$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{6} + O(x^{10})$

$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + O(t^4) \Rightarrow$

$\cos x^3 = 1 - \frac{x^6}{2} + O(x^{12})$

b) $\frac{\sin x^2 - x^2}{\cos x^3 - 1} = \frac{-\frac{x^6}{6} + O(x^{10})}{-\frac{x^6}{2}+O(x^{12})} = \frac{-\frac16 + O(x^4)}{-\frac12 + O(x^6)} \to \frac13$ då $x\to0$

---

**5** a) Kvotkrit. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n}\cdot\frac{1+2^n}{1+2^{n+1}} \to \frac12 < 1$ då $n\to\infty$

Serien är konvergent

b) Jämför med divergenta serien $\sum_{n=1}^\infty \frac1n$

$\frac{n}{1+n^3} / \frac1n = \frac{n^2}{1+n^2} \to 1$ då $n\to\infty$

Serien är divergent

c) Serien är alternerande. Eftersom $\frac{n}{1+n^2} \searrow 0$ då $n\to\infty$ så är serien Konvergent enligt Leibnitz.

**6** Derivera: $y' = \frac{y^2}{1+x^2}$, $y(0) = a$

$\frac{1}{y^2}dy = \frac{1}{1+x^2}dx$, $-\frac1y = \arctan x + C$

a) $-\frac{\pi}{2} = 0 + C$ ger $y = \frac{1}{\frac\pi2 - \arctan x}$

b) $y=0$ är lösning

**7** b) Enl. M.V.S. finns $c$: $x\le c\le x+2$ så att

$\int_x^{x+2}\arctan x\,dx = 2\arctan c \to 2\cdot\frac\pi2 = \pi$ då $x\to\infty$ eftersom $x\to\infty \Rightarrow c\to\infty$.