

**Lösningar till tentamensskrivningen
MVE 016, Matematisk analys i en variabel I1, 20091217**

1. a) Beräkna $\int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx$. (4p)
b) Beräkna $\int_0^{\pi/4} \frac{(1 + \cos x) \sin x}{\cos x} \, dx$. (4p)

a) Använd partiell integration - ta primitiv funktion till $\sin x$ och derivera i andra steget x :

$$\int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx = \left[x(-\cos x) \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 1 \cdot (-\cos x) \, dx = 0 + \left[\sin x \right]_0^{\pi/2} = 1$$

Svar: 1

b) Här tar vi istället variabelsubstitution:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} \frac{(1 + \cos x) \sin x}{\cos x} \, dx &= \{t = \cos x, \, dt = -\sin x \, dx\} = - \int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1+t}{t} \right) dt = \\ \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \left(\frac{1}{t} + 1 \right) dt &= \left[\ln t + t \right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 = 1 - \left(\ln \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\ln 2}{2} = \frac{2 - \sqrt{2} + \ln 2}{2} \end{aligned}$$

Svar: $\frac{2 - \sqrt{2} + \ln 2}{2}$

2. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y' = xy$ som uppfyller begynnelsevillkoret $y(0) = 2$. (6p)

Ekvationen är separabel, vi skriver $\frac{dy}{dx} = xy$. Om $y \neq 0$ skriver vi $\frac{dy}{y} = x \, dx$ och löser $\int \frac{dy}{y} = \int x \, dx + c$, som ger $\ln |y| = \frac{1}{2}x^2 + c$. Detta ger $y = C e^{\frac{x^2}{2}}$.

Slutligen ger begynnelsevillkoret $y(0) = 2$ att $C = 2$.

Svar: $y = 2e^{\frac{x^2}{2}}$

3. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$y'' + y = x, \quad y(0) = y'(0) = 0. \quad (6p)$$

Vi bestämmer allmänna lösningen y_h till motsvarande homogena ekvation $y'' + y = 0$ och därefter hittar vi en lösning y_p till den vi har. Alla lösningar till den senare kan då skrivas $y_h + y_p$.

Karakteristiska ekvationen $r^2 + 1 = 0$ har rötterna $r = \pm i$, varmed $y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

Ansätt $y_p = Ax + B$, vi får då $y_p'' + y_p = Ax + B$, varför $A = 1$, $B = 0$ och $y_p = x$.

Allmänna lösningen är alltså $y = x + C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

Begynnelsevillkoren ger slutligen $C_1 = 0$, $1 + C_2 = 0$.

Svar: $y = x - \sin x$.

4. Beräkna den volym som erhålls då området i \mathbb{R}^2 som begränsas av $y = x^2$, $y = 0$ och $x = 2$, roteras kring

a) x -axeln, (4p)

b) y -axeln. (4p)

a) Skivformlen ger: $V = \int_0^2 \pi(x^2)^2 dx = \int_0^2 \pi x^4 dx = \frac{32\pi}{5}$

Svar: $\frac{32\pi}{5}$

b) Om vi använder cylindriska skal ser det ut så här:

$$V = \int_0^2 2\pi x \cdot y dx = 2\pi \int_0^2 x^3 dx = 8\pi$$

Om vi istället vill använda skivformeln, får vi integrera i y -led. Integranden blir arean av en cirkelring med innerradien x och ytterradien 2:

$$V = \int_0^4 (\pi 2^2 - \pi x^2) dy = \pi \int_0^4 (4 - y) dy = 8\pi$$

Svar: 8π

5. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \ln(1+x^2) - (1 - \cos x)}{(e^{x^2} - 1) \sin^2 x}. \quad (6p)$$

Tabellen över Maclaurinutvecklingar säger

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + O(t^3). \quad \text{Med } t = x^2 \text{ får vi } \ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + O(x^6).$$

$$e^t = 1 + t + O(t^2). \quad \text{Med } t = x^2 \text{ får vi } e^{x^2} = 1 + x^2 + O(x^4).$$

Vi uttrycker nu vårt bråk med hjälp av dessa utvecklingar och Maclaurinutvecklingarna av $\sin x$ och $\cos x$:

$$\frac{\frac{1}{2} \ln(1+x^2) - (1 - \cos x)}{(e^{x^2} - 1) \sin^2 x} = \frac{\frac{1}{2}(x^2 - \frac{x^4}{2} + O(x^6)) - (1 - (1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6)))}{(1 + x^2 + O(x^4) - 1)(x + O(x^3))^2} =$$

$$= \frac{-\frac{x^4}{4} + \frac{x^4}{24} + O(x^6)}{(x^2 + O(x^4))(x^2 + O(x^4))} = \frac{-\frac{5x^4}{4} + O(x^6)}{x^4 + O(x^6)} = \frac{-\frac{5}{4} + O(x^2)}{1 + O(x^2)} \rightarrow -\frac{5}{4} \quad \text{då } x \rightarrow 0$$

Svar: $-\frac{5}{24}$

6. För vilka x är

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n+1} x^n}{3^{n-1}}$$

konvergent och vad blir summan för dessa x ? (5p)

Serien kan skrivas (om vi bryter ut $\frac{2^3 x^2}{3}$):

$$\frac{8x^2}{3} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2x}{3}\right)^{n-2} = \frac{8x^2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2x}{3}\right)^n$$

Nu ser vi att vi har en geometrisk serie med kvoten $\frac{2x}{3}$ (detta kan förstås också upptäckas genom att man skriver ut några av de första termerna), då vet vi att den konvergerar om och endast om $\left|\frac{2x}{3}\right| < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{3}{2}$ med summan $\frac{1}{1 - \frac{2x}{3}}$. Vi multiplicerar slutligen in faktorn

$$\frac{8x^2}{3} \text{ och får:} \quad \text{Svar: Konvergent för } |x| < \frac{3}{2} \text{ med summan } \frac{8x^2}{3 - 2x}$$

7. a) Formulera och bevisa Analysens fundamentalsats. (4p)

b) Visa att om serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är konvergent, så gäller att $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. (2p)

Se läroboken, avsnitt 5.5 sats 5 och 9.2 sats 4!

8. Antag att $y(x)$ löser begynnelsevärdesproblemet $y' = y^2 + x^2$, $y(0) = 0$. Vad är då

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y(x)}{x^3} ? \quad (5p)$$

Vi försöker approximera lösningen med sitt Maclaurinpolynom av grad 3:

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + O(x^4)$$

Insättning av $x = 0$ i ekvationen ger att $y'(0) = 0$. Derivering ger $y'' = 2x + 2yy'$, så speciellt är $y''(0) = 0$. Ytterligare en derivering ger $y''' = 2 + 2y'^2 + 2yy''$. Alltså är $y'''(0) = 2$. Taylors formel ger nu att $y(x) = \frac{2x^3}{3!} + O(x^4) = \frac{x^3}{3} + O(x^4)$. Alltså är

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y(x)}{x^3} = \frac{1}{3}.$$

Svar: $\frac{1}{3}$