

Tentamen i Matematisk analys i en variabel för I1, MVE016/MVE015

2010 04 09 kl. 8.30–12.30.

Hjälpmedel: Inga, ej räknedosa. Formelsamling finns på baksidan.

Telefon: Fredrik Lindgren, 0703-088304

För godkänt krävs minst 20 poäng. Betyg 3: 20-29 poäng, betyg 4: 30-39 poäng, betyg 5: 40-50 poäng.

Bonuspoäng från hösten 2009 ingår.

Lösningar och besked om rättningen lämnas på kursens hemsida :

www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/mve016/0910/

Skriv program och inskrivningsår på omslaget, skriv personliga koden på samtliga inlämnade papper.

1. (a) Beräkna $\int_0^{\pi^2/4} \sin \sqrt{x} dx$, (4p)

(b) Beräkna $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x(x+2)}$ om den konvergerar. Motivera annars att den är divergent. (4p)

2. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y' = x\sqrt{1-y^2}$ som uppfyller begynnelsevillkoret $y(0) = -1$. (6p)

3. Lös differentialekvationen $y'' + 4y' + 3y = 2e^{-x}$, $y(0) = y'(0) = 0$. (6p)

4. Beräkna volymen av den kropp som uppstår då området $0 \leq y \leq \sin x^2$ med $0 \leq x \leq \sqrt{\pi}$ roteras kring y -axeln. (6p)

5. Beräkna längden av kurvan

$$x = \cos t + t \sin t, \quad y = \sin t - t \cos t, \quad 0 \leq t \leq 4\pi. \quad (6p)$$

6. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x \arctan x}{(e^{x^2} - 1)(\cos x^2 - 1)}. \quad (6p)$$

7. Undersök om serierna konvergerar eller ej.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)! + 1}$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln(1 + \frac{1}{n})$ (3p+3p)

8. (a) Formulera och bevisa jämförelsesatsen för generaliserade integraler. (4p)

(b) Avgör om integralen $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x \ln x}}$ konvergerar eller ej. (2p)

Trigonometriska formler

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$2 \sin x \cos y = \sin(x + y) + \sin(x - y)$$

$$2 \sin x \sin y = \cos(x - y) - \cos(x + y)$$

$$2 \cos x \cos y = \cos(x - y) + \cos(x + y)$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^\xi$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos \xi$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos \xi$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n + \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} (1+\xi)^{\alpha-n-1}$$

I alla utvecklingarna är ξ ett tal mellan 0 och x .

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$