MATEMATIK js
Chalmers tekniska högskola

Lösningar till tentamensskrivningen
MVE 015/016, Matematisk analys i en variabel I1, 20100409

1. (a) Vi börjar med en variabelsubstitution: $t = \sqrt{x}$, så $x = t^2$, $dx = 2t\,dt$, $\pi^2/4 \mapsto \pi/2$. Sen blir det partiell integration.

$$\int_0^{\pi^2/4} \sin\sqrt{x}\,dx = 2\int_0^{\pi/2} t\sin t\,dx = \Big[2t(-\cos t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\pi/2} -\cos t\,dx = 0 + 2\Big[\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2.$$

Svar: 2

(b) Vi räknar och gör först partialbråksuppdelning:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x(x+2)} = \int_1^{\infty} \frac{1/2}{x} + \frac{-1/2}{x+2}dx = \frac{1}{2}\Big[\ln x - \ln(x+2)\Big]_1^{\infty} = \frac{1}{2}\Big[\ln\frac{x}{x+2}\Big]_1^{\infty} =$$

$\frac{1}{2}(\lim_{R\to\infty}\ln\frac{R}{R+2} - \ln\frac{1}{3}) = \frac{1}{2}(\ln 1 + \ln 3) = \frac{1}{2}\ln 3.$

Svar: $\frac{1}{2}\ln 3$

2. Ekvationen är separabel. Om $\sqrt{1-y^2} \neq 0$ skiver vi $\dfrac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = xdx$ och får

$\displaystyle\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int x\,dx + c$, som ger $\arcsin y = \frac{1}{2}x^2 + c$. Också $y \equiv \pm 1$ är lösningar. Villkoret $y(0) = -1$ ger $y \equiv -1$ eller $\arcsin y = \frac{x^2}{2} - \frac{\pi}{2}$, där $-\frac{\pi}{2} \le \frac{x^2}{2} - \frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2}$, så $0 \le x \le \sqrt{2\pi}$. Lösningen är $y = \sin\left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{\pi}{2}\right)$ eller $y \equiv -1$.

Svar: $y = \sin\left(\frac{x^2}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$ **eller** $y \equiv -1$

3. Vi bestämmer allmänna lösningen y_h till motsvarande homogena ekvation $y'' + 4y' + 3y = 0$ och därefter hittar vi **en** lösning y_p till den vi har. Alla lösningar till den senare kan då skrivas $y_h + y_p$.
Karakteristiska ekvationen $r^2 + 4r + 3 = (r+1)(r+3) = 0$ har rötterna $r = -1, -3$, varmed $y_h = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x}$.
Ansätt $y_p = Axe^{-x}$, vi får då $y_p' = Ae^{-x} - Axe^{-x}$, $y_p'' = -2Ae^{-x} + Axe^{-x}$. Insättning ger $-2Ae^{-x} + Axe^{-x} + 4(Ae^{-x} - Axe^{-x}) + 3Axe^{-x} = 2e^{-x}$, så $2Ae^{-x} = 2e^{-x}$, varför $A = 1$.
Allmänna lösningen är alltså $y = xe^{-x} + C_1e^{-x} + C_2e^{-3x}$.
Begynnelsevillkoren ger slutligen $C_1 + C_2 = 0$, $1 - C_1 - 3C_2 = 0$, så $C_2 = -C_1 = \frac{1}{2}$.

Svar: $y = xe^{-x} - \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}e^{-3x}$.

4. Vi använder cylindriska skal:
Vol $= 2\pi\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin x^2\,dx = \pi\big[-\cos x^2\big]_0^{\sqrt{\pi}} = -\pi(\cos\pi - \cos 0) = -\pi(-1-1) = 2\pi.$

Svar: 2π

5. Vi beräknar $x' = -\sin t + \sin t + t\cos t = t\cos t$, $y' = \cos t - \cos t + t\sin t = t\sin t$, så $\sqrt{(x')^2 + (y')^2} = \sqrt{t^2} = t$, eftersom $t \ge 0$. Längden blir $\int_0^{4\pi} t\,dt = \big[\frac{1}{2}t^2\big]_0^{4\pi} = 8\pi^2$.

Svar: $8\pi^2$

6. Tabellen över Maclaurinutvecklingar ger

$\sin^2 x = (x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \dots)^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2}{45}x^6 + \dots.$

$x \arctan x = x(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots) = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{5} + \dots.$

I nämnaren får vi $e^{x^2} - 1 = 1 + x^2 + \dots - 1 = x^2 + \dots$ och $\cos x^2 - 1 = 1 - \frac{1}{2}x^4 + \dots - 1 = -\frac{1}{2}x^4 + \dots.$

Vi uttrycker nu vårt bråk med hjälp av dessa utvecklingar:

$$\frac{\sin^2 x - x\arctan x}{(e^{x^2}-1)(\cos x^2 - 1)} = \frac{(x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2}{45}x^6 + \dots) - (x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{5} + \dots)}{(x^2 + \dots)(-\frac{1}{2}x^4 + \dots)}$$

$$= \frac{(\frac{2}{45} - \frac{1}{5})x^6 + \dots}{-\frac{1}{2}x^6 + \dots} = \frac{-\frac{7}{45} + \dots}{-\frac{1}{2} + \dots} \to \frac{14}{45} \quad \text{då} \quad x \to 0$$

Svar: $\frac{14}{45}$

7. (a) Då $0 \leq \frac{n!}{(n+2)!+1} \leq \frac{n!}{(n+2)!} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \leq \frac{1}{n^2}$ och $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergerar, så gäller enligt jämförelsekriteriet för positiva serier att $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!+1}$ konvergerar.

Svar: konvergent

(b) Serien är alternerande. Följden $\ln(1+\frac{1}{n})$ är avtagande, och $\lim_{n\to\infty} \ln(1+\frac{1}{n}) = 0$. Enligt kriteriet för alternerande serier är serien konvergent.

Svar: konvergent

8. (a) Se kursboken.

(b) Då $\frac{1}{\sqrt{x^2+x\ln x}} \geq \frac{1}{\sqrt{x^2+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}x}$, om $x \geq 1$, och $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ är divergent, så är också $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2+x\ln x}}$ divergent.

Svar: divergent