MVE016/015 2010-08-27 Lösningar

---

1. Beräkna integralerna

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{x^4+1}\,dx$ (4p)

   (b) $\displaystyle\int_1^2 x\ln x^2\,dx$ (4p)

(a) Använd variabelsubstitution:

$$\int_0^1 \frac{2x}{x^4+1}\,dx = \{t = x^2,\ dt = 2x\,dx,\ 0^2 = 0,\ 1^2 = 1\} = \int_0^1 (\frac{1}{t^2+1})\,dt =$$

$$\Big[\arctan t\Big]_0^1 = \arctan 1 - 0 = \pi/4\ .$$

Svar: $\pi/4$

(b) Använd partiell integration - ta primitiv funktion till x och derivera i andra steget $\ln x^2$:

$$\int_1^2 x\ln x^2\,dx = \Big[\frac{1}{2}x^2\ln x^2\Big]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2}x^2\frac{2x}{x^2}\,dx = 2\ln 4 - 0 - \Big[\frac{1}{2}x^2\Big]_1^2 = 4\ln 2 - \frac{3}{2}$$

Svar: $4\ln 2 - 3/2$

---

2. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $y' - \dfrac{1}{x}y = -xe^{-x}$.

   Ange också den lösning som uppfyller $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 0$. (6p)

Ekvationen är linjär med den integrerande faktorn $e^{\int(-1/x)\,dx} = e^{-\ln x} = 1/x$

Vi multiplicerar båda leden med denna och får

$y'/x - y/x^2 = -e^{-x} \quad\Leftrightarrow\quad (y/x)' = -e^{-x} \quad\Leftrightarrow\quad y/x = e^{-x} + C \quad\Leftrightarrow\quad y = xe^{-x} + Cx$

Villkoret $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 0$ ger att $C = 0$.

Svar: $y = xe^{-x}$

---

3. Lös differentialekvationen $y'' + 4y' + 3y = 3e^x$. (4p)

Vi bestämmer allmänna lösningen y_h till motsvarande homogena ekvation $y'' + 4y' + 3y = 0$ och därefter hittar vi **en** lösning y_p till den vi har. Alla lösningar till den senare kan då skrivas $y_h + y_p$.

Karakteristiska ekvationen $r^2+4r+3 = 0$ har rötterna $r = -1, -3$, varmed $y_h = C_1e^{-x}+C_2e^{-3x}$

Ansätt $y_p = Ae^x$, vi får då $y_p'' + 4y_p' + 3y_p = 8Ae^x$, varför $A = 3/8$ och $y_p = \frac{3}{8}e^x$.

Allmänna lösningen är alltså $y = \frac{3}{8}e^x + C_1e^{-x} + C_2e^{-3x}$.

Svar: $y = \frac{3}{8}e^x + C_1e^{-x} + C_2e^{-3x}$.

---

4. Bestäm Maclaurinutvecklingen med termer upp till och med ordning 4 för funktionen $f(x) = e^{x^2}\cos x$. Beräkna sedan derivatorna $f^{(3)}(0)$ och $f^{(4)}(0)$. (6p)

Tabellen över Maclaurinutvecklingar säger:

$e^t = 1 + t + t^2/2 + O(t^3)$. Med $t = x^2$ får vi $e^x = 1 + x^2 + x^4/2 + O(x^6)$.

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + O(x^6)$.

Vi multiplicerar och får $(1+x^2+x^4/2+O(x^6))(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + O(x^6)) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + O(x^6))$.

Detta betyder att $f^{(3)}(0) = 0$ och $f^{(4)}(0) = 1$.

Svar: $f(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + O(x^6)),\ f^{(3)}(0) = 0,\ f^{(4)}(0) = 1$

---

5. Beräkna $\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$. (4p)

Serien kan skrivas (om vi bryter ut $(\frac{2}{3})^3$):

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Nu ser vi att vi har en geometrisk serie med kvoten $\frac{2}{3}$ (detta kan förstås också upptäckas genom att man skriver ut några av de första termerna), då vet vi att summan är $\dfrac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3$. Vi multiplicerar slutligen in faktorn $(\frac{2}{3})^3$ och får: **Svar:** $\frac{8}{9}$

---

6. (a) Låt kurvan $y = \cos x,\ -\pi \leq x \leq \pi$, roterar kring linjen $y = -1$.
Beräkna volymen av den kropp som bildas. (6p)

(b) Området som begränsas av kurvan i (a) och linjen $y = -1$ roterar istället kring linjen $x = -\pi$. Skriv upp (men beräkna inte!) en integral som uttrycker volymen av den uppkomna rotationskroppen. (2p)

(a) Vi använder skivformlen. Radien av skivan för given x-koordinat är $\cos x - (-1) = 1 + \cos x$. Volumen blir $V = \pi \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos x)^2\, dx = \pi \int_{-\pi}^{\pi} 1 + 2\cos x + \cos^2 x\, dx$. Med $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$ får vi $V = \pi \int_{-\pi}^{\pi} \frac{3}{2} + 2\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x\, dx = \pi \left[\frac{3}{2}x + 2\sin x + \frac{1}{4}\sin 2x\right]_{-\pi}^{\pi} = \pi\left(\frac{3}{2}\pi - (-\frac{3}{2}\pi)\right) = 3\pi^2$.

Svar: $3\pi^2$

(b) Vi använder cylindriska skal. Radien av cylindern är nu $\pi + x$.
Så $V = 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} (\pi + x)(1 + \cos x)\, dx$.

Svar: $2\pi \int_{-\pi}^{\pi} (\pi + x)(1 + \cos x)\, dx$

---

7. Vid odling av en jästkultur är tillväxthastigheten proportionell mot mängden jäst. En sådan odling görs i en behållare från vilken man tappar ut a kg jäst per minut.

(a) Antag att mängden jäst från början är y_0 kg och att proportionalitetskonstanten är 0,2.
Bestäm mängden jäst som funktion av tiden (minuter). (6p)

(b) Går det att välja a så att mängden jäst i behållaren hålls konstant?
Hur ska man i så fall välja? (2p)

(a) Jästmängden y ges av diffekvationen

$$y' = 0,2y - a\ .$$

Detta är en linjär differential ekvation.
Lösningen till den homogena ekvationen $y' = 0,2y$ är $y = Ce^{0,2t}$. En partikulär lösning till den ursprungliga ekvationen kan hittas med variation av parametrar, men det är lätt att se att $y = 5a$ är en lösning. Den allmänna lösningen är $y = Ce^{0,2t} + 5a$.
Begynnelsevillkoret för $t = 0$ ger att $y_0 = C + 5a$, så $C = y_0 - 5a$.

Svar: $y = (y_0 - 5a)e^{0,2t} + 5a$

(b) Mängden jäst i behållaren hålls konstant om $y_0 - 5a = 0$, så $a = y_0/5$.

Svar: $a = y_0/5$

---

8. (a) Definiera begreppet *konvergens* för en serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. (2p)

(b) Är serien $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ konvergent? Motivera ditt svar. (2p)

(c) Förklara varför man för serier med positiva termer ofta skriver $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ för att ange konvergens. (2p)

(a) En serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerar om följden (s_N) av partialsummor $s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ har ett gränsvärde.

(b) Serien $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ har föjlden $-1, 0, -1, 0, \ldots$ som följd av partialsummor. Följden saknar gränsvärde. **Svar: Nej**

(c) Följden av partialsummor s_N för en serie med positiva termer är växande. Antingen har den ett (ändligt) gränsvärde eller $s_N \to \infty$, då $N \to \infty$. Om $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, så har följden ett ändligt gränsvärde och serien konvergerar.
