Kompletteringar till MVE017

J A S, HT 2017

1 Integralkalkylens huvudsats

Sats 1.1 (Integralkalylens huvudsats del 1) *Antag att f är kontinuerlig på intervallet $[a, b]$ och sätt*

$$g(x) = \int_a^x f(t)\, dt, \quad a \leq x \leq b.$$

Då gäller

- *g är kontinuerlig på $[a, b]$,*
- ★ *g är deriverbar på (a, b) och $g'(x) = f(x)$ när $x \in (a, b)$.*

Anm

1. $g(x)$ existera eftersom f är kontinuerlig på $[a, x]$.
2. $g(a) = 0$ och $g(b) = \int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b f(x)\, dx$.

Bevis Tag ett $x \in (a, b)$. Differenskvoten för g i x är då

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{h}(g(x+h) - g(x)) = \frac{1}{h}\Big(\int_a^{x+h} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt \Big) = \\ &= \frac{1}{h}\Big(\int_a^x f(t)\, dt + \int_x^{x+h} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt \Big) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\, dt. \end{aligned}$$

Vi har att $g'(x) = \lim_{h \to 0} Q$ om gränsvärdet exiterar.

Antag nu att $h > 0$. Funktionen f är kontinuerlig på $[x, x+h]$. Max/minsatsen (Extremal Value Theorem, S p 278 i 8:e upplagan) ger att f antar ett minsta (m) och ett största (M) värde på intervallet $[x, x+h]$. Det betyder att

- $m \leq f(t) \leq M$, när $t \in [x, x+h]$,
- $m = f(t_m)$ och $M = f(t_M)$ för några tal t_m, $t_M \in [x, x+h]$

Integration av olikehten $m \leq f(t) \leq M$ ger

$$\int_x^{x+h} m\, dt \leq \int_x^{x+h} f(t)\, dt \leq \int_x^{x+h} M\, dt$$

$$hm \leq \int_x^{x+h} f(t)\, dt \leq hM.$$

Division med $h(> 0)$ ger nu

$$f(t_m) = m \leq \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\, dt (= Q) \leq M = f(t_M)$$

När $h < 0$ gäller att $x + h < x$. Med ombytta roller för x och $x + h$ gäller enligt ovan att

$$f(t_m) = m \leq \frac{1}{x - (x+h)} \int_{x+h}^{x} f(t)\, dt \leq M = f(t_M),$$

där t_m och t_M ligger mellan $x + h$ och x. Etersom $\int_{x+h}^{x} f(t)\, dt = -\int_{x}^{x+h} f(t)\, dt$ gäller alltså

$$f(t_m) = m \leq \frac{1}{h} \int_{x}^{x+h} f(t)\, dt (= Q) \leq M = f(t_M) \tag{1}$$

när $h \neq 0$. När $h \to 0$, gäller att $t_m \to x$ och $t_M \to x$, eftersom t_m och t_M ligger mellan x och $x+h$. Enligt förutsättning är f kontinuerlig i x, så $f(t_m) \to f(x)$ och $f(t_M) \to f(x)$, när $h \to 0$. Instängningsregeln ger nu att $Q \to f(x)$, när $h \to 0$. Vi har därmed visat att g är deriverbar i varje $x \in (a, b)$ och att $g'(x) = \lim_{h\to 0} Q = f(x)$. Eftersom en deriverbar funktion är kontinuerlig gäller att g är kontinuerlig på (a, b).

Om $x = a$ så gäller (1) när $h > 0$, så när $h \to 0^+$ gäller att $Q = \frac{1}{h} \int_{a}^{a+h} f(t)\, dt \to f(a)$. Av detta följer att $g(a + h) = hQ + g(a) \to 0 \cdot f(a) + g(a)$, när $h \to 0^+$. Detta visar att g är (höger)kontinuerlig i a.

Om $x = b$ så gäller (1) när $h < 0$, så när $h \to 0^-$ gäller att $Q = \frac{1}{h} \int_{b+h}^{b} f(t)\, dt \to f(b)$. Av detta följer att $g(b+h) = hQ+g(b) \to 0 \cdot f(b)+g(b) = g(b)$, när $h \to 0^-$. Detta visar att g är (vänster)kontinuerlig i b.□

Definition 1.1 (Primitiv funktion) *Om f är definierad på ett intervall, så är F en* primitiv funktion *till f där, om F är kontinuerlig på intervallet och deriverbar i det inre av intervallet med $F'(x) = f(x)$ där.*

Enligt sats 1.1 har en kontinuerlig funktion på $[a, b]$ alltid (minst) en primitv funktion; $g(x)$ är en primitiv funktion till $f(x)$.

Sats 1.2 *Anatag att F och G är primitiva funktioner till f på $[a, b]$. Då finns en konstant C så att $F(x) = G(x) + C$ för alla $x \in [a, b]$.*

Bevis. Förutsättningarna ger att $F(x) - G(x)$ är kontinuerlig på $[a, b]$ och att $(F(x) - G(x))' = f(x) - f(x) = 0$, för alla $x \in [a, b]$. En konsekvens av medelvärdessatsen ger nu att $F(x) - G(x)$ är konstant (låt oss kalla den C) på $[a, b]$, dvs $F(x) = G(x) + C$ där. □

Sats 1.3 (Integralkalkylens huvudsats del 2) ★ *Om f är kontinuerlig på $[a, b]$ och F är en primitiv funktion till f där, så gäller*

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Bevis Vi vet att $g(x) = \int_{a}^{x} f(t)\, dt$ är en primitiv funktion till f på $[a, b]$. Därför finns en konstant C så att $F(x) = g(x) + C$ för alla $x \in [a, b]$.

Vi har $\int_{a}^{b} f(t)\, dt = g(b) = g(b) - g(a)$ (för $g(a) = 0$.) Därför gäller att

$$\int_{a}^{b} f(t)\, dt \quad = \quad g(b) = g(b) - g(a) = g(b) + C - (g(a) + C) = F(b) - F(a).$$

□