Matematisk Analys för I1, MVE016

Lösningar eller svar till tentamen 18 dec 2013

1.

a. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}+2} = \begin{bmatrix} x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{bmatrix} = \int_0^2 \frac{2tdt}{t+2} = 2\int_0^2 \left(1 - \frac{2}{t+2}\right) dt = 4 - 4\ln 2$

b. $\int \cos(\sin x) \cdot \cos x \, dx = \sin(\sin x) + C$

c. $\int x^4 \ln x \, dx = \frac{x^5}{5} \ln x - \int \frac{x^5}{5} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^5}{5} \ln x - \frac{x^5}{25} + C$

2.

a. Använd kvotkriteriet: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{n+1} \to 0$ då $n \to \infty$.
Serien är konvergent.

b. Termerna går inte mot 0, så serien är divergent.

c. Serien kan skrivas $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(x-\frac{2}{3}\right)^n}{n}$ som är absolutkonvergent då $\left|x - \frac{2}{3}\right| < 1$.
För $x = -\frac{1}{3}$ är serien betingat konvergent, för $x = \frac{5}{3}$ är den divergent.
Svar: $-\frac{1}{3} \le x < \frac{5}{3}$

3.

a. Ekvationen är separabel: $e^y dy = e^{-x} dx$ så $y = \ln(C - e^{-x})$
Begynnelsevillkoret ger $y = \ln(e + 1 - e^{-x})$

b. Ekvationen löses med integrerande faktor:
$y' + \frac{3}{x} y =$ så $(x^3 y)' = x^4$ och $y = \frac{x^2}{5} + \frac{C}{x^3}$

4. Partialbråksuppdelning ger $\frac{2}{(x+1)(x^2+1)} = -\frac{x-1}{x^2+1} + \frac{1}{x+1}$

så $\int_1^\infty \frac{2dx}{(x+1)(x^2+1)} = \int_1^\infty -\frac{x-1}{x^2+1} + \frac{1}{x+1} dx = \left[-\ln \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} + arctan(x) \right]_1^\infty = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 4}{4}$

5. Maclaurinutvecklingar ger att det givna uttrycket kan skrivas $\frac{-\frac{x^4}{6}+O(x^5)}{x^4+O(x^5)} \rightarrow -\frac{1}{6}$ då $x \rightarrow 0$

6. Basområdet begränsas av axlarna samt linjen $2x + 3y = 6$

Volymen blir därför $= \frac{\pi}{2} \int_0^3 \left(1 - \frac{x}{3}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}$

7. Om $a < 0$ blir en term i homogenlösningen: $Ce^{\sqrt{-a}t}$ och lösningen blir obegränsad då $t \rightarrow \infty$.

Om $a = 0$ blir homogenlösningen $y_h = Ct + D$, alltså obegränsad.

Om $a > 0$ blir homogenlösningen $y_h = C \sin \sqrt{a}t + D \cos \sqrt{a}t$ som är begränsad. Och eftersom partikulärlösningen kommer att få formen $y_p = p \sin 2t + q \cos 2t$ blir även $y_h + y_p$ begränsad.

Undantaget inträffar då $a = 4$ eftersom partikulärlösningen i det fallet får formen $y_p = p\, t \sin 2t + q\, t \cos 2t$ som blir obegränsad.

Svar: Alla positiva a utom $a = 4$

8.

a. Se boken

b. $\sum_1^\infty \frac{1}{k^2} = \sum_1^N \frac{1}{k^2} + \sum_{N+1}^\infty \frac{1}{k^2}$

Nu är $\sum_{N+1}^\infty \frac{1}{k^2} > \int_{N+1}^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{N+1}$ (se nedre figuren) och

$\sum_{N+1}^\infty \frac{1}{k^2} < \int_N^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{N}$ (se övre figuren)