Tent Mat Analys i en variabel

för I1, MVE016

Svar/lösningar 29/8 - 14

(1)

a) $$\int_1^2 x\sqrt{x-1}\,dx = \int_1^0 (y+1)\cdot\sqrt{y}\,dy = \frac{16}{15}$$

b) $$\int \ln(2x+1)\,dx = x\cdot\ln(2x+1) - \int \frac{2x}{2x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}(1+2x)\ln(2x+1) - x + C$$

c) $$\frac{x-1}{x^3+x} = \frac{x+1}{x^2+1} - \frac{1}{x}$$

så $$\int \frac{x-1}{x^3+x}\,dx = \arctan x + \ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + C$$

(2)

a) Nei, jämför med $\sum_1^\infty \frac{1}{n}$

b) $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n\cdot 4^n}{(n+1)\cdot 4^{n+1}} \to \frac{1}{4} \text{ om } n\to\infty$$

så konvergensradie $R = 4$

$x = 2$ ger $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent

$x = -6$ ger $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konvergent

Svar $-6 \leq x < 2$

3

Homogen lösning $y'' - 2y' + 2y = 0$

kar ekv $r^2 - 2r + 2 = 0$, $r = 1 \pm i$

$$y_h = e^x (A \cos x + B \sin x)$$

Partikulär lösning ansätt $y_p = ax + b$

ger $y_p = x + \frac{5}{2}$

så $y = e^x (A \cos x + B \sin x) + x + \frac{5}{2}$

$y(0) = 3 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$

$y'(0) = 0 \Rightarrow A + B + 1 = 0$

Svar $y = \frac{e^x}{2} (\cos x - 3 \sin x) + x + \frac{5}{2}$

(4)

Om $b > 0$ är $\frac{x^a}{1+x^b} \sim x^{a-b}$ då x stort

och $\int_1^\infty x^{a-b}\,dx$ konvergent om $a-b < -1$

om $b \le 0$ är $\frac{x^a}{1+x^b} \sim x^a$ då x stort

och $\int_1^\infty x^a\,dx$ konvergent om $a < -1$

Svar: $\begin{cases} \text{för alla } a,b \text{ med } a < b-1 \text{ och } b > 0 \\ \text{för alla } a,b \text{ med } a < -1 \text{ och } b \le 0 \end{cases}$

(5) Separabel ekvation

$$\frac{dy}{1+e^{-y}} = \frac{\sin x \cdot dx}{1+\cos x} \qquad \frac{e^y}{e^y+1}\,dy = \frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx$$

$$\ln(e^y+1) = -\ln(1+\cos x) + C$$

$$e^y+1 = D\cdot(1+\cos x)^{-1}$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow D = 4$$

$$e^y = \frac{4}{1+\cos x} - 1$$

Svar $y = \ln\left(\frac{4}{1+\cos x} - 1\right)$

(6) Maclaurinutvecklingen ger

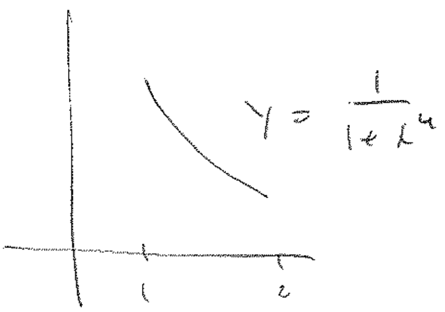
$$\frac{\sin(ax)-\ln(1+2x)}{e^{ax}-1-2x+2x^2} = \frac{ax-2x+2x^2+O(x^3)}{1+ax+\frac{a^2x^2}{2}-1-2x+2x^2+O(x^3)}$$

$$= \frac{(a-2)x+2(x^2)+O(x^3)}{(a-2)x+\left(\frac{a^2}{2}+2\right)x^2+O(x^3)}$$

som $\to 1$ om $a \neq 2$ och $\to \frac{1}{2}$ om $a=2$

Svar $\begin{cases} 1/2 & \text{om } a=2 \\ 1 & \text{om } a\neq 2 \end{cases}$

(7)



Grafen till $y=\frac{1}{1+x^4}$

är avtagande så

$$\frac{1}{1+2^4} \leq \int_1^2 \frac{dx}{1+x^4} \leq \frac{1}{1+1^4}$$

Och eftersom $\frac{1}{1+x^4} \leq \frac{1}{x^4}$ och $\int_1^2 \frac{dx}{x^4} = \frac{7}{24}$

gäller även den andra olikheten

(8) a) se boken

b) $f'(x) = \dfrac{\sin x}{x^2+x+1}$

som är ≥ 0 då $\sin x \geq 0$

alltså i intervallen

$[2n\pi, 2n\pi+\pi]$ där n heltal