Tentamen Matematisk Analys för I 1

MVE016

17 aug 15

Svar alla lösningar

(1)

a) $$\int x^3 \ln(2x)\,dx = \frac{4\ln(2x)-1}{16}x^4 + C$$

b) $$\int \sin^3 x\,dx = \int \sin x\,(1-\cos^2 x)\,dx =$$

$$= \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C$$

c) $$\int_0^\infty \frac{x}{x^4+1}\,dx = \frac{1}{2}\Big[\arctan x^2\Big]_0^\infty = \frac{\pi}{4}$$

(2)

a) Kvotkriteriet ger $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2^n\cdot(n+1)}{2^{n+1}\cdot n} \to \dfrac{1}{2}$

då $n\to\infty$

så $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{n}{2^n}$ är konvergent

b) $\displaystyle\sum_1^\infty a_n x^n$ med $a_n = \tan\frac{1}{n}$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\tan\frac{1}{n+1}}{\tan\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\tan\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\cdot n}{\frac{1}{n+1}\cdot\tan\frac{1}{n}\cdot(n+1)} =$$

$= 1$ eftersom $\dfrac{\tan x}{x}\to 1$ då $x\to 0$

$x = 1$ ger $\sum_{1}^{\infty} \tan \frac{1}{n}$ som är divergent (jämför med $\sum \frac{1}{n}$)

$x = -1$ ger $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \cdot \tan \frac{1}{n}$ som konvergerar betingat

Svar: konvergent då $-1 \leq x < 1$

(3) $y' - 3y = e^x \Rightarrow (y e^{-3x})' = e^{-2x}$

$$\Rightarrow y = \frac{3e^{3x} - e^x}{2}$$

(4) $y'' + 3y' + 2y = \cos x$

$y_h = Ae^{-x} + Be^{-2x}$

y_p: ansätt $y_p = a\cos x + b\sin x$

Svar: $y = Ae^{-x} + Be^{-2x} + \dfrac{\cos x + 3\sin x}{10}$

(5) $x^2 (y' + y^2) = y^2$

$\frac{dy}{dx} = y^2 \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right)$

$\frac{dy}{y^2} = \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right) dx$

$-\frac{1}{y} = -\frac{1}{x} - x - C$

($y = 0$ ej lösning)

Lös ut y:

$y = \frac{x}{x^2 + Cx + 1}$

$y(2) = -2 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \frac{x}{x^2 - 3x + 1}$

⑥

$$\int_e^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^a} = \left[\begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \end{array}\right] = \int_1^\infty \frac{dt}{t^a}$$

Som är konvergent om $a > 1$

⑦

$$\frac{1-\cos(ax)}{1+x-e^{bx}} = \frac{1-\left(1-\frac{a^2x^2}{2}\right)+O(x^3)}{1+x-1-bx-\frac{b^2x^2}{2}+O(x^3)} =$$

$$= \frac{\frac{a^2x^2}{2}+O(x^3)}{(1-b)x-\frac{b^2x^2}{2}+O(x^3)} \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{om } b \neq 1 \\ -a^2 & \text{om } b = 1 \end{cases}$$

då $x \to 0$

⑧

Om kurvan "sänks" två enheter

får vi $V = \pi \int_0^1 (x^2 - x)^2 \, dx = \frac{\pi}{30}$

⑨

a) se boken

9b) $\sum_{1}^{\infty} a_n = a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \ldots \leq$

$\leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots$

$= \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n}$

Å andra sidan

$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n} = a_1 + (a_2 + a_2) + (a_4 + a_4) + (a_4 + a_4) + \ldots =$

$\leq 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 2a_4 + \ldots$

$= 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Så $\sum_{1}^{\infty} a_n$ och $\sum_{0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ är

konvergenta samtidigt