Tentamen i Matematisk Analys i en variabel för I1, MVE 016 MATEMATIK

2016 – 01 – 13 kl 8.30 – 12.30 Chalmers

# *Svar eller lösningar*

1. Beräkna följande integraler:

   a. $\int_0^1 \frac{dx}{2x+3} \qquad = \frac{1}{2}\ln\frac{5}{3}$

   b. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx \quad = \left[\frac{1}{\cos x}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}-1$

   c. $\int_0^1 xe^{-2x}dx \quad = \left[-\frac{xe^{-2x}}{2}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{e^{-2x}}{2}dx = \frac{1}{4} - \frac{3}{4e^2}$

2.

   a. Är serien $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3}{3n+2n^3}$ konvergent?
   Nej, använd jämförelsekriteriet

   b. För vilka *x* konvergerar serien $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{2^n\sqrt{n}}$ ?
   För alla x med $-3 \le x < 1$

3. Beräkna med hjälp av Maclaurinutvecklingar gränsvärdet
   $\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{-3x}-6x}{x^3}$

   Uttrycket blir $= \frac{6x+2\frac{27x^3}{6}-6x+O(x^5)}{x^3}$ som går mot 9 då x går mot 0.

**Till uppgifterna 4 – 8 skall lösningarna vara tydligt motiverade**

4. Lös differentialekvationerna

   a. $xy' + 3y = x^2$

      Vi använder integrerande faktor och får $(yx^3)' = x^4$ så $y = \frac{x^2}{5} + \frac{C}{x^3}$

   b. $y' + e^x = e^{x-y}$

      Ekvationen är separabel: $\frac{dy}{e^{-y}-1} = e^x$ Genom att integrera bägge sidor får man $-\ln|1 - e^y| = e^x + C$. Till sist löser man ut y: $y = \ln\left|1 - De^{-e^x}\right|$

5. Beräkna den generaliserade integralen $\int_0^\infty \frac{4-x}{(x+1)(x^2+4)} dx$

   Partialbråk: $\frac{4-x}{(x+1)(x^2+4)} = \frac{1}{x+1} - \frac{x}{x^2+4}$

   Integralen blir därför $= \left[\ln(x+1) - \frac{1}{2}\ln(x^2+4)\right]_0^\infty = \left[\ln\frac{x+1}{\sqrt{x^2+4}}\right]_0^\infty = \ln 2$

6. Beräkna volymen av följande område: basen utgörs av cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 1$, snitt i rät vinkel mot *x*-axeln bildar liksidiga trianglar.

   Trianglarnas sidor blir $= 2\sqrt{1-x^2}$ och deras areor $= \sqrt{3}\,(1-x^2)$.

   Volymen av hela området blir därför $= \int_{-1}^{1} \sqrt{3}\,(1-x^2)dx = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

7. 

   a. Lös differentialekvationen $y'' + 2y' + 2y = 4\cos 2t - 2\sin 2t$ om $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$

      Homogenlösning: $y_h = e^{-t}(A\sin t + B\cos t)$

      För partikulärlösningen ansätter vi $y_p = a\sin 2t + b\cos 2t$

      Vi får a=1 och b=0. Begynnelsevillkoren ger till sist att

      $y = e^{-t}(\sin t + 2\cos t) + \sin 2t$

b. Om $y(t)$ är lösningen från uppgift a), låt $M(x) = \max\{|y(t)|, t \geq x\}$,
alltså det största värdet av $|y(t)|$ då $t \geq x$
Beräkna $\lim_{x\to\infty} M(x)$

Vi skriver $= L = \lim_{x\to\infty} M(x)$
Det är klart att om t är tillräckligt stort är $|e^{-t}(\sin t + 2\cos t)| < \varepsilon$ för ett givet $\epsilon > 0$, så $|y(t)| < 1 + \varepsilon$ för stora t. Det följer att $L \leq 1$
Å andra sidan är $y\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right) > 1$ för alla n.
Alltså är $L = 1$

8.

a. Skriv upp formeln för en geometrisk summa. **(1p)**
b. Skriv upp och bevisa formeln för en geometrisk serie. **(2p)**
c. Beräkna $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ **(3p)**

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \implies \sum_{1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \implies \sum_{0}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$
Så $\sum_{0}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4}$