MVE016 Tentamen 4 april 16

Svar elle lösninga

(1) a) $\int_1^2 (t-1)\cdot\sqrt{t}\,dt = \frac{4}{15}(1+\sqrt{2})$

b) $\int_0^{\pi} \sin x\,(1-\cos^2 x)\,dx = \frac{4}{3}$

c) $\arctan(4x) + C$

(2) a) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!\cdot n^n}{n!\cdot(n+1)^{n+1}} \to \frac{1}{e}$ då $n \to \infty$

så konvergent

b) $\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}\cdot\sqrt{n+2}}{3^n\cdot\sqrt{n+1}} = 3$

För $x = -\frac{13}{3}$ får vi betingad konvergens

Svar: $-\frac{13}{3} \le x < -\frac{11}{3}$

(3)

$$y = Ae^{-x} + Be^{-2x} + xe^{-x}$$

(4)

$$y = \frac{4e^{3x} - 1}{3}$$

(5)

$\ln x^2 < x$ för stora x $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{x + \ln x^2} > \dfrac{1}{x + x}$

och $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{2x}$ divergerar

(6)

$x \geq 0 \Rightarrow 1 \leq \sqrt{1 + x^n} \leq 1 + x^n$

och $\displaystyle\int_0^1 1 + x^n \, dx = \frac{n+2}{n+1}$

(7)

Vi använder utvecklingen

$$e^{-x^4} = 1 - x^4 + \frac{x^8}{2} + \frac{e^{\theta x^4} \cdot x^{12}}{6}$$

där $-1 \leq \theta \leq 0$

$$\int_0^{1/2} \frac{e^{\theta x^4} \cdot x^{12}}{6} dx \leq \frac{1}{2} \int_0^{1/2} x^{12} dx = \frac{1}{2^{14} \cdot 13} < \frac{10^{-4}}{2}$$

så felet är tillräckligt litet när vi

skriver $\int_0^{1/2} e^{-x^4} dx \approx \int_0^{1/2} 1 - x^4 + \frac{x^8}{2} dx =$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{160} + \frac{1}{2^9 \cdot 18} \approx 0{,}4939$$

8

Differentialekvation: $y' = \frac{3y}{x-1}$

$$\frac{dy}{y} = \frac{3dx}{x-1} \qquad \ln y = 3 \ln(x-1) + C$$

$$y = D \cdot (x-1)^3 \qquad y(2) = 4 \Rightarrow y = 4(x-1)^3$$

9 b) $\sum_1^n \frac{1}{n+k} = \sum_1^n \frac{1/n}{1+k/n} \to \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$

Eller så använder man samma typ av uppskattning som integralkriteriet baseras på