Matematisk Analys för I1

MVE016 160815

Lösningar / svar

1 a) $$\int_0^2 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^2 = \frac{\ln 5}{2}$$

b) $$\int_0^2 \frac{x}{1+x}\,dx = \int_0^2 1 - \frac{1}{1+x}\,dx = 2 - \ln 3$$

c) $$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x} = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos x\,dx}{1-\sin^2 x} = \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{dt}{1-t^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln \frac{1+t}{1-t}\right]_0^{1/\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$$

2 a) $\sin \frac{1}{n^2} \approx \frac{1}{n^2}$ och $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$ konvergent

så $\sum_1^\infty \sin \frac{1}{n^2}$ konvergent

2b) $a_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$ och $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$ då $n \to \infty$

så $R = 1$ $\sum_1^\infty \frac{1}{n \cdot \sqrt{n}}$ och $\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$

är båda konvergenta

Svar: $1 \leq x \leq 3$

3

Homogen lösning till $y'' + 4y = \cos 2t$

är $y_h = A\cos 2t + B\sin 2t$

Partikulärlösn: ansätt $y_p = a t \sin 2t + b t \cos 2t$

så att $y_p'' + 4y_p$ blir $= 4a\cos 2t - 4b\sin 2t$

så $y_p = \frac{1}{4} t \sin 2t$

Begynnelsevillkoren ger

Svar: $y = \cos 2t + \frac{1}{4} t \sin 2t$

(4)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x+x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} =$$

$$= \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left[\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})\right]\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

(5)

Om $0 \le x \le 1$ är $e^{x^n} \le e^x$

och $\int_0^1 e^{(x^n)} dx \le \int_0^1 e^x dx = e-1$

(6)

Ekvationen är separabel:

$$y' = e^y \cdot x + 3e^y \cdot e^{-x}$$

$$e^{-y} dy = (x + 3e^{-x})\, dx$$

$$-e^{-y} = \frac{x^2}{2} - 3e^{-x} + C$$

$$y = -\ln\left(C - \frac{x^2}{2} + 3e^{-x}\right)$$

(7) $e^{ax} = 1 + ax \; \frac{a^2x^2}{2} + O(x^3)$

$$Q = \frac{e^{ax} - 1 - x}{e^{bx} - 1 - x} = \frac{(a-1)x + \frac{a^2x^2}{2} + O(x^3)}{(b-1)x + \frac{b^2x^2}{2} + O(x^3)}$$

~~Ire~~ Fyra fall: om $\begin{cases} a \neq 1 \\ b \neq 1 \end{cases}$ så $Q \to \frac{a-1}{b-1}$

om $\begin{cases} a = 1 \\ b \neq 1 \end{cases}$ så $Q \to 0$

om $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$ så $Q \to 1$

om $\begin{cases} a \neq 1 \\ b = 1 \end{cases}$ så $Q \to \infty$

(8) Tangenten elevatha: $y - t = y'(s)(x - s)$

så $0 - t = y'(s)\left(-\frac{1}{s} - s\right)$

som deden hll elvatione $-\frac{y}{y'} = -\frac{1+x^2}{x}$

$y' - \frac{x}{1+x^2} y = 0, \quad \frac{y'}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}} y = 0,$

$y = C\sqrt{1+x^2} \qquad y(0) = 2 \Rightarrow y = 2\sqrt{1+x^2}$