Lösningar till MVE016 Matematisk analys i en variabel för I1 17-01-11

1. (a) Division ger

$$y' + \frac{x}{1+x^2} \cdot y = \frac{x}{1+x^2}$$

som är linjär av första ordningen. Eftersom $A(x) = \int x/(1+x^2)\,dx = \ln(1+x^2)/2$, är $e^{A(x)} = \sqrt{1+x^2}$ en integrerande faktor. Ekvationen multipliceras med denna och man får

$$D(y\sqrt{1+x^2}) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

som integreras till

$$y\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+x^2} + C,$$

där C är en godtycklig konstant. Vi löser ut y och får

$$y = 1 + \frac{C}{\sqrt{1+x^2}}$$

Svar $y(x) = 1 + C/\sqrt{1+x^2}$, där C är en godtycklig konstant.

(b) Den homogena ekvationen har karakteristisk ekvation $0 = r^2 + 2r + 2 = (r+1)^2 + 1$, som ger $r = -1 \pm i$. Lösningsformel ger att lösningarna till den homogena ekvationen är

$$y_h = e^{-x}(A\cos x + B\sin x),$$

där A och B är godtyckliga konstanter.
Vi söker en partikulärlösning och ansätter $y_p = ax + b$, ett polynom av samma grad som i högra ledet. Vi har $y_p' = a$ och $y_p'' = 0$, som efter insättning ger

$$2a + 2(ax+b) = x$$

vilket ger $a = 1/2$, $b = -1/2$, så $y_p = (x-1)/2$.
Vi har att $y = y_h + y_p$ och bestämmer nu A och B så att $y(0) = -1/2$, $y'(0) = 1$.
Vi ska alltså ha

$$-1/2 = y(0) = 1 \cdot (A \cdot 1 + B \cdot 0) + (0-1)/2 = A - 1/2,$$

som ger $A = 0$. Derivering av $y = Be^{-x}\sin x + (x-1)/2$ ger
$y' = Be^{-x}(-\sin x + \cos x) + 1/2$ och vi ska ha

$$1 = y'(0) = B + 1/2$$

dvs $B = 1/2$.
Svar: $y(x) = (e^{-x}\sin x + x - 1)/2$.

2. (a) Kvadratkomplettering ger

$$\int_2^3 \frac{1}{5+x^2-4x}\,dx \quad = \quad \int_2^3 \frac{1}{1+(x-2)^2}\,dx = \Big[\arctan(x-2)\Big]_2^3 = \arctan 1 - \arctan 0 = \pi/4.$$

Svar: $\pi/4$.

(b) Vi sätter $u = \sin x$ och har då $du = \cos x\,dx$, så att

$$\int \frac{\sin x \cos x}{(1+\sin x)^2}\,dx \quad = \quad \int \frac{u}{(1+u)^2}\,du.$$

Vi gör partialbråksuppdelning och ansätter

$$\frac{u}{(1+u)^2} \quad = \quad \frac{A}{(1+u)^2} + \frac{B}{1+u}.$$

Gemensamt bråk ger att vi ska ha $u = A + B(1+u)$, dvs $B = 1$, $A = -1$.
Integration ger nu

$$\int \frac{u}{(1+u)^2}\,du \quad = \quad \frac{1}{1+u} + \ln|1+u| = \frac{1}{1+\sin x} + \ln(1+\sin x)\ (+C)$$

Svar: $1/(1+\sin x) + \ln(1+\sin x)$ ($+C$, där C är en godtycklig funktion som är konstant på varje intervall i definitionsmängden.)

3. Vi sätter

$$Q = \frac{(e^x + e^{-x})\cos x - 2}{x \arctan x - x^2}$$

och utvecklar i potensserier kring $x = 0$. Vi har

$$\begin{aligned}
e^x + e^{-x} &= 2\Big(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots\Big) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots \\
(e^x + e^{-x})\cos x &= 2\Big(1 + \Big(\frac{2}{4!} - \frac{1}{(2!)^2}\Big)x^4 + \Big(\frac{2}{8!} - \frac{2}{2!6!} + \frac{1}{(4!)^2}\Big)x^8 + \cdots\Big) \\
(e^x + e^{-x})\cos x - 2 &= x^4(-\frac{2}{6} + \frac{32}{8!}x^4 + \cdots) \\
\arctan x &= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots \\
x \arctan x - x^2 &= x^4(-\frac{1}{3} + \frac{1}{5}x + \cdots)
\end{aligned}$$

Vi får därför

$$Q \quad = \quad \frac{-\frac{1}{3} + \frac{32}{8!}x^4 + \cdots}{-\frac{1}{3} + \frac{1}{5}x + \cdots} \to 1$$

när $x \to 0$.

Svar: 1.

4. (a) Med

$$a_n = \frac{(-1)^n(x+2)^n}{n(n-1)3^n}$$

har vi

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x+2|}{3} \cdot \frac{n(n-1)}{(n+1)n} \to \frac{|x+2|}{3},$$

när $n \to \infty$. Kvotkriteriet ger att serien är (absolut)konvergent när $|x+2|/3 < 1$, dvs när $|x+2| < 3$.

När $x = -5$ får vi en serie med termerna $a_n = 1/(n(n-1))$ som vi jämför med termerna i den konvergenta serien $\sum 1/n^2$. Med $b_n = 1/n^2$ har vi $a_n/b_n \to 1 > 0$, när $n \to \infty$. Jämförelsekriteriet på gränsvärdesform ger därför att serien är konvergent när $x = -5$, eftersom $\sum 1/n^2$ är det.

När $x = 1$ har vi serien $\sum(-1)^n/(n(n-1))$, som är absolutkonveregent eftersom $\sum 1/(n(n-1))$ är konvergent.

Svar Potensserien har konvergensintervallet $[-5, 1]$ och konvergerar alltså precis när x ligger i detta intervall.

(b) Vi sätter $f(t) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} t^n$ och har då att den sökta seriens summa är $f(-2/3)$ och att $p(x) = f((x+2)/3)$. Vi försöker identifiera $f(t)$ med en "vanlig" funktion.

Derivering ger

$$f'(t) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-1} t^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{t^n}{n} = \ln(1+t)$$

Integrering ger

$$f(t) = \int 1 \cdot \ln(1+t)\, dt = \{\text{ PI }\} = (1+t)\ln(1+t) - t + C.$$

Men $f(0) = 0$, så $C = 0$.

Svar $p(x) = ((x+5)/3)\ln((x+5)/3) - (x+2)/3$ och seriens summa är $(2 - \ln 3)/3$.

5. Vi har $\frac{1}{1+x^4} = \frac{1}{4}$, när $x = \pm 3^{1/4}$. Skalformeln ger att kroppens volym är

$$\int_0^{3^{1/4}} 2\pi x \Big(\frac{1}{1+x^4} - \frac{1}{4}\Big)\, dx = \pi\Big[\arctan x^2 - \frac{x^2}{4}\Big]_0^{3^{1/4}} =$$

$$= \pi\Big(\arctan\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\Big) = \pi^2/3 - \sqrt{3}\pi/4.$$

Svar: $\pi^2/3 - \sqrt{3}\pi/4$.

6. Vi sätter tiden för förvärvet till $t = 0$, så att $y(0) = b/10$. Vi löser den logistiska ekvationen, som är separabel ($y \equiv 0$ och $y \equiv b$ <u>är</u> lösningar):

$$\int \frac{dy}{y(1-y/b)} = \int a\, dt$$

Vi gör PBU i vänstra ledet och ansätter

$$\frac{1}{y(1-y/b)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{1-y/b}.$$

Gemensamt bråkstreck ger $1 = A(1-y/b) + By$, dvs $A = 1$, $B = 1/b$.

Integration och exponentiering ger nu

$$\begin{aligned}\ln\left|\frac{y}{1-y/b}\right| &= at + C_1 \\ \frac{y}{1-y/b} &= Ce^{at}\end{aligned}$$

där vi satt $C = \pm e^{C_1}$. Men $y(0) = b/10$ ger $b/9 = C$. Vi sätter $f = be^{at}/9$ och löser ut y ur $y/(1-y/b) = f$. Multiplikation ger

$$\begin{aligned} y &= (1-y/b)f \\ y(1+f/b) &= f \\ y &= f/(1+f/b) = \frac{be^{at}/9}{1+e^{at}/9} = \frac{b}{9e^{-at}+1}.\end{aligned}$$

Avverkningen ska börja när $b/2 = y(t)$, dvs när $9e^{-at} = 1$. Logaritmering ger $at = \ln 9$, och $t = 2\ln 3/a$. Den takt som ska hållas är (instättning av $y = b/2$ i ursprungliga ekvationen) $y' = a \cdot b/2(1-1/2) = ab/4$.

Svar: Avverkningen ska börja $2\ln 3/a$ år efter förvärvet, och den takt som man ska avverka med är $ab/4$ m^3/år.

7. Tangent i $(a, f(a))$ har riktningskoefficentern $f'(a)$. Om k är normalens riktningskoefficient gäller $-1 = k \cdot f'(a)$ efersom de båda linjerna är vinkelräta mot varandra.

   Vi får att normalen har ekvation $y = (-1/f'(a))(x-a) + f(a)$. Den skär x-axeln i b, så $(b-a) = f(a)f'(a)$.

   Triangeln med hörn i $(a,0)$, $(a, f(a))$ och $(b,0)$ har arean $|(b-a)| \cdot |f(a)|/2$. Eftersom detta ska vara 2 oberoende av a får vi (vi ersätter a med x av bekvämlighet):

$$f(x)^2 f'(x) = \pm 4,$$

   som integreras till $f(x)^3/3 = \pm 4x + C_1$, där C_1 är en godtycklig konstant. Vi får två möjligheter ($C = 3C_1$)

$$\begin{aligned} f(x) &= (12x + C)^{1/3} \\ f(x) &= (-12x + C)^{1/3}\end{aligned}$$

   Eftersom vi ska ha $f(3) = 2$ gäller $f(x) = (12x-28)^{1/3}$ respektive $f(x) = (44-12x)^{1/3}$.

   Svar: $f(x) = (12x-28)^{1/3}$ och $f(x) = (44-12x)^{1/3}$.

8. **Kriterium:** Antag att den positiva följden $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ avtar mot 0. Då är den alternerande serien $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ konvergent.

   Bevis För partialsumman S_{2n+1} till serien gäller

$$S_{2n+1} = a_0-(a_1-a_2)-\cdots-(a_{2n-1}-a_{2n})-a_{2n+1} = (a_0-a_1)+(a_2-a_3)+\cdots+(a_{2n}-a_{2n+1}).$$

Här är allt inom parenteser positivt eftersom följden $\{a_n\}$ avtar mot 0. Detta ger att för varje n är $S_{2n+1} < a_0$ och $S_{2n-1} < S_{2n+1}$. Föjden av partialsummor med udda index är alltså växande och uppåt begränsad och har därför (enlig sats) ett gränsvärde som vi kan beteckna med $s = \lim_{n\to\infty} S_{2n+1}$.

För S_{2n} gäller nu $S_{2n} = S_{2n+1} - a_{2n+1} \to s + 0 = s$, när $n \to \infty$, eftersom a_n avtar mot 0.

Det betyder att seriens partialsummor har gränsvärdet s, och serien är därför konvergent (med summan s) enligt definition.