Lösningar till MVE016 Matematisk analys i en variabel för I1 17-04-10

1. (a) Division ger

$$\frac{2yy'}{1+y^2} = x.$$

Ekvationen är alltså separabel. Integration av vänstra ledet ger

$$\int \frac{2y}{1+y^2}\,dy \quad = \quad \ln(1+y^2)$$

Efter integration blir det alltså $\ln(1+y^2) = x^2/2 + C_1$, där C_1 är godtycklig. Exponentiering ger $1+y^2 = e^{x^2/2}\cdot C$, där $C = e^{C_1}$ är en godtycklig positiv konstant. Vi löser ut y och får:

Svar: $y = \pm\sqrt{Ce^{x^2/2}-1}$, där C är en godtycklig positiv konstant.

(b) Den homogena ekvationen har karakteristisk ekvation $0 = r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2$, som ger dubbelroten $r = 1$. Lösningsformel ger att lösningarna till den homogena ekvationen är

$$y_h \quad = \quad e^x(Ax+B),$$

där A och B är godtyckliga konstanter.
Vi söker en partikulärlösning och ansätter $y_p = ce^{2x}$. Vi har $y_p' = 2ce^{2x}$ och $y_p'' = 4ce^{2x}$, som efter insättning ger

$$ce^{2x} \quad = \quad e^{2x}$$

vilket ger $c = 1$, så $y_p = e^{2x}$.
Vi har att $y = y_h + y_p$.

Svar: $y(x) = e^x(Ax+B) + e^{2x}$, där A och B är godtyckliga konstanter.

2. (a) Varibalebytet $t = \sqrt{x}$, $x = t^2$, $dx = 2t\,dt$ ger

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x}(x+2\sqrt{x}+2)}\,dx &= \int \frac{2t}{t(t^2+2t+2)}\,dt = \int \frac{2}{(t+1)^2+1}\,dt = 2\arctan(t+1) = \\ &= 2\arctan(\sqrt{x}+1).\end{aligned}$$

Svar: $2\arctan(\sqrt{x}+1)$.

(b) Vi har

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{2}{x^2+4x+3}\,dx &= \int_0^\infty \frac{2}{(x+3)(x+1)}\,dx = \int_0^\infty \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3}\right)dx = \\ &= \left[\ln\left|\frac{x+1}{x+3}\right|\right]_0^\infty = \ln 1 - \ln(1/3) = \ln 3.\end{aligned}$$

Svar: $\ln 3$.

3. (a) Vi har kända Maclaurinutvecklingar:

$$\begin{aligned}\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \text{termer av högre grad}\\ e^t &= 1 + t + \frac{t^2}{2} + \text{termer av högre grad}\\ e^{x^2/2} &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \text{termer av högre grad.}\end{aligned}$$

Maclaurinpolynomet P_4 av grad 4 kan beräknas som summan av termer av grad högst 4 i uttrycket

$$\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8}\right) - 1.$$

Detta ger

$$P_4(x) = 1 + \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{8} - \frac{1}{4}\right)x^4 - 1 = -\frac{x^4}{12}.$$

Svar: $-x^4/12$.

(b) Vi har

$$\begin{aligned}\arctan t &= t - \frac{t^3}{3} + \text{termer av högre grad}\\ x^2\arctan x^2 &= x^4 + \text{termer av högre grad.}\end{aligned}$$

Tillsammans med a) ger detta att

$$\frac{\cos(x)e^{x^2/2} - 1}{x^2\arctan x^2} = \frac{-x^4/12 + \text{termer av högre grad}}{x^4 + \text{termer av högre grad}} = \frac{-1/12 + \text{termer med } x}{1 + \text{termer med } x} \to -\frac{1}{12},$$

när $x \to 0$.

Svar: $-1/12$.

4. (a) Med
$$a_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)} \cdot x^{2n+3}$$
har vi
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = x^2 \cdot \frac{(2n+1)(2n+3)}{(2n+3)(2n+5)} \to x^2,$$
när $n \to \infty$. Kvotkriteriet ger att serien är (absolut)konvergent när $x^2 < 1$, dvs när $-1 < x < 1$, och divergent när $|x| > 1$.
När $x = -1$ gäller
$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)(2n+3)}$$
Alltså är $p(-1)$ en alternerande serie och eftersom $1/((2n+1)(2n+3))$ avtar mot 0 när $n \to \infty$ är serien konvergent enligt kriteriet för alternerande serier.
När $x = 1$ har vi
$$a_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)}$$
som ger att $p(1)$ är alternerande. Samma kriterium ger att även $p(1)$ är konvergent.

Svar Potensserien är konvergent precis för x i intervallet $[-1, 1]$.

(b) Vi har
$$p'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot x^{2n+2} = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot x^{2n+1} = x \arctan x.$$
och att $p(0) = 0$.
Vi får
$$\begin{aligned} p(x) &= \int x \arctan x \, dx = \{\text{PI}\} = \frac{x^2+1}{2} \cdot \arctan x - \int \frac{x^2+1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \, dx = \\ &= \frac{x^2+1}{2} \cdot \arctan x - \frac{x}{2} + C. \end{aligned}$$
Eftersom $p(0) = 0$ är $C = 0$.

Svar: $p(x) = (x^2+1)\arctan(x)/2 - x/2$.

5. Ekvationen $1 = \sqrt{x^2-1}$ har den positiva lösningen $x = \sqrt{2}$. Skivformeln ger att volymen ges av
$$\begin{aligned} \pi \int_{\sqrt{2}}^{3} \left((\sqrt{x^2-1})^2 - 1^2\right) dx &= \pi \int_{\sqrt{2}}^{3} (x^2-2) \, dx = \pi \left[\frac{x^3}{3} - 2x\right]_{\sqrt{2}}^{3} = \\ &= \pi\left(9 - 6 - \frac{2\sqrt{2}}{3} + 2\sqrt{2}\right) = \pi\left(3 + \frac{4\sqrt{2}}{3}\right) = (9+4\sqrt{2}) \cdot \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Svar: $(9+4\sqrt{2})\pi/3$.

6. Vid t h efter stänging är vätskans höjd i glaset $h(t)$. Om $r(t)$ är vätskespegelns radie vid tiden t gäller att $r(t)/h(t) = 5/5 = 1$, så $r(t) = h(t)$. Vid tiden t är vätskeytans area $A(t) = \pi r(t)^2 = \pi h(t)^2$, och vätskans volym är $V(t) = h(t)\pi r(t)^2/3 = \pi h(t)^3/3$. Detta ger $V'(t) = \pi h(t)^2 h'(t)$. Enligt uppgift gäller även att $V'(t) = 1 - (1/4\pi)A(t) = 1 - h(t)^2/4$.

   (a) Vätskan slutar stiga i glaset då $0 = V'(t) = 1 - h(t)^2/4$, dvs när $h = 2$.

   Svar: 2 cm.

   (b) Vi har två olika uttryck för $V'(t)$ som ger likheten $\pi h(t)^2 h'(t) = 1 - h(t)^2/4$.

   Svar $h(t)$ löser begynnelsevärdesporblemet $\pi y^2 y' = 1 - y^2/4$, $y(0) = 0$.

   (c) Ekvationen $h(t)^2 h'(t) = 1 - h(t)^2/4$ separeras och vi får

$$4\pi \int \frac{h^2}{4-h^2}\, dh = \int 1\, dt.$$

   I högra ledet blir det $t + C$, där C är en godtycklig konstant. I vänstra ledet får vi

$$\begin{aligned} 4\pi \int \frac{h^2}{4-h^2}\, dh &= 4\pi \int \Big(-1 + \frac{4}{4-h^2} \Big)\, dh = 4\pi \int \Big(\frac{1}{2-h} + \frac{1}{2+h} - 1 \Big)\, dh = \\ &= 4\pi \Big(\ln \Big| \frac{2+h}{2-h} \Big| - h \Big). \end{aligned}$$

   Detta ger sambandet

$$4\pi \Big(\ln \Big| \frac{2+h}{2-h} \Big| - h \Big) = t + C.$$

   Eftersom $h(0) = 0$ gäller att $C = 0$ och vi har

$$4\pi \Big(\ln \Big| \frac{2+h}{2-h} \Big| - h \Big) = t.$$

   När $h = 1$ ger detta att $t = 4\pi(\ln 3 - 1)$.

   Svar: $4\pi(\ln 3 - 1)$ timmar efter stängning.

7. Enligt formeln för area av rotationsyta är den sökta arean

$$2\pi \int_1^{\sqrt{2}} f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Vi har $f'(x) = x/\sqrt{x^2-1}$ som ger att $\sqrt{1+(f')^2} = \sqrt{2x^2-1}/\sqrt{x^2-1}$. Vi ska alltså beräkna

$$A = 2\pi \int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{2x^2-1}\, dx.$$

Vi sätter $1/\cos t = \sqrt{2}x$ och har $dx = (1/\sqrt{2})(\sin t/\cos^2 t)dt$. Variabelbytet ger

$$A = \sqrt{2}\pi \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sin^2 t}{\cos^3 t}\, dt = \sqrt{2}\pi \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sin^2 t}{(1-\sin^2 t)^2} \cos t\, dt.$$

Vi sätter nu $u = \sin t$, som ger

$$A = \sqrt{2}\pi \int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{3}/2} \frac{u^2}{(1-u)^2(1+u)^2}\, du$$

Vi ansätter partialbråksuppdelning

$$\frac{u^2}{(1-u)^2(1+u)^2} = \frac{A}{1-u} + \frac{B}{(1-u)^2} + \frac{C}{1+u} + \frac{D}{(1+u)^2}.$$

Handpåläggning ger $B = D = 1/4$. Vi sätter in $u = 0$ och $u = 2$ vilket ger

$$\begin{aligned} 0 &= A + C + 1/2 \\ 4/9 &= A/3 + 1/36 - C + 1/4, \end{aligned}$$

som leder till $A = C = -1/4$. vilket ger

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{2}\pi}{4} \int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{3}/2} \Big(\frac{-1}{1-u} + \frac{1}{(1-u)^2} - \frac{1}{1+u} + \frac{1}{(1+u)^2} \Big)\, du = \\ &= \frac{\sqrt{2}\pi}{4} \Big[\ln\Big|\frac{1-u}{1+u}\Big| + \frac{1}{1-u} - \frac{1}{1+u} \Big]_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{3}/2} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4} \Big[\ln\Big|\frac{1-u}{1+u}\Big| + \frac{2u}{1-u^2} - \Big]_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{3}/2} = \\ &= \frac{\sqrt{2}\pi}{4} \Big(\ln\Big|\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\Big| + 4\sqrt{3} - 2\sqrt{2} \Big) = \frac{\sqrt{2}\pi}{4} \Big(\ln \Big(\frac{1}{(2+\sqrt{3})^2} \cdot \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{1} \Big) + 4\sqrt{3} - 2\sqrt{2} \Big) = \\ &= \frac{\sqrt{2}\pi}{4} \Big(2\ln \Big(\frac{\sqrt{2}+1}{2+\sqrt{3}} \Big) + 4\sqrt{3} - 2\sqrt{2} \Big) = \frac{\sqrt{2}\pi}{2} (2\sqrt{3} - \sqrt{2} + \ln((1+\sqrt{2})(2-\sqrt{3})) \end{aligned}$$

Svar: $\dfrac{\sqrt{2}\pi}{2} \cdot \Big(2\sqrt{3} - \sqrt{2} + \ln((2-\sqrt{3})(1+\sqrt{2})) \Big).$

8. **Kriterium:** Antag att $f(x)$ är en positiv kontinuerlig avtagande funktion definierad för alla $x \geq 0$. Då gäller att

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$$

är konvergent precis när

$$\int_0^{\infty} f(x)\, dx$$

är konvergent.

Bevis Låt N vara ett positivt heltal. Dela in intervallet $[0, N]$ i N intervall av längd 1. På intervallet $[0, N]$ har funktionen då vänstersumman $\sum_{n=0}^{N-1} f(n)$ och högersumman $\sum_{n=1}^{N} f(n)$. Eftersom f är avtagande gäller

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) \leq \int_0^N f(x)\, dx \leq \sum_{n=0}^{N-1} f(x).$$

Vi har också, eftersom f är positiv, att

$$\int_0^N f(x)\, dx \leq \int_0^{\infty} f(x)\, dx.$$

Om S_N är N:te partialsumman till serien gäller att följden $\{S_N\}_0^\infty$ är växande eftersom alla termer i serien är positiva enligt förutsättning. Enligt satsen om monotona begränsade följder är därför följden av partialsummor konvergent precis när den är uppåt begränsad.

Enligt ovan gäller

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} f(n) = f(0) + \sum_{n=1}^{N} f(n) \leq f(0) + \int_0^N f(x)\,dx \leq f(0) + \int_0^\infty f(x)\,dx$$

Om $\int_0^\infty f(x)\,dx$ är konvergent är därmed följden av partialsummor uppåt begränsad av detta tal plus $f(0)$ och därför konvergent. Enligt definition gäller samma sak för serien.

Om, andra sidan, integralen är divergent gäller att $\int_0^N f(x)\,dx \to \infty$, när $N \to \infty$. Enligt ovan gäller därför att $\int_0^N f(x)\,dx \leq S_{N-1} \to \infty$ när $N \to \infty$. Alltså är partialsummorna nu inte en uppåt begränsad talföljd och därmed divergent. Enligt definition gäller samma sak för serien.