

Lösningar till MVE017 Matematisk analys i en variabel för II 18-01-10

1. (a) Division ger

$$y' + \frac{15x}{3x^2 + 4} \cdot y = \frac{x}{\sqrt{3x^2 + 4}}.$$

Vi har

$$\int \frac{15x}{3x^2 + 4} dx = \frac{5}{2} \ln(3x^2 + 4),$$

vilket ger den integrerande faktorn $(3x^2 + 4)^{5/2}$. Ekvationen multipliceras med den och vi får

$$D((3x^2 + 4)^{5/2}y) = x(3x^2 + 4)^2.$$

Integration ger

$$(3x^2 + 4)^{5/2}y = (1/18)(3x^2 + 4)^3 + C.$$

Vi ska ha $y(0) = 1/9$ vilket ger $16 \cdot 2/9 = 16 \cdot 4/18 + C$, dvs $C = 0$.

Vi löser ut y och får $y = \sqrt{3x^2 + 4}/18$.

Svar: $y = \sqrt{3x^2 + 4}/18$.

- (b) Den homogena ekvationen har karakteristisk ekvation $0 = r^2 - 6r + 10 = (r - 3)^2 + 1$, som ger rötterna $r = 3 \pm i$. Lösningformel ger att lösningarna är

$$y = e^{3x}(A \cos x + B \sin x),$$

där A och B är godtyckliga konstanter. Vi ska ha $y(0) = 0$, vilket ger $A = 0$, så $y = Be^{3x} \sin x$, som har $y' = Be^{3x}(3 \sin x + \cos x)$. Vi ska ha $y'(0) = 1$, vilket ger $1 = B$.

Svar: $y(x) = e^x \sin x$.

2. (a) Ansättning för partialbråksuppdelning ger

$$\frac{2x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2(x + 1)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{(x - 2)^2} + \frac{C}{x + 1}.$$

Handpåläggning ger $B = (8 - 8 + 3)/(2 + 1) = 1$, och $C = (2 + 4 + 3)/(-3)^2 = 1$. Sätter vi $x = 0$ får vi

$$\frac{3}{4} = \frac{A}{-2} + \frac{1}{4} + 1,$$

vilket ger $A = 1$. Integration ger

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2(x + 1)} dx &= \int \left(\frac{1}{x - 2} + \frac{1}{(x - 2)^2} + \frac{1}{x + 1} \right) dx = \\ &= \ln((x - 2)(x + 1)) - \frac{1}{x - 2} \end{aligned}$$

Svar: $\ln((x - 2)(x + 1)) - 1/(x - 2)$.

(b) Omskrivning med ger

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1 - \sin^2 t}{10 \cos t + \sin 2t + \sin^2 t \cos t} dt = \int \frac{\cos^2 t}{10 \cos t + 2 \cos t \sin t + \sin^2 t \cos t} dt = \\ &= \int \frac{\cos t}{10 + 2 \sin t + \sin^2 t} dt. \end{aligned}$$

Vi sätter $u = \sin t$ och har $du = \cos t dt$, vilket ger

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{du}{10 + 2u + u^2} = \int \frac{du}{9 + (1 + u)^2} = \frac{1}{9} \int \frac{du}{1 + (\frac{1+u}{3})^2} = \\ &= \frac{1}{3} \arctan\left(\frac{1+u}{3}\right) = \frac{1}{3} \arctan\left(\frac{1+\sin t}{3}\right). \end{aligned}$$

Svar: $\arctan((1 + \sin t)/3)/3$.

3. Vi har kända Maclaurinutvecklingar:

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \text{termer av högre grad} \\ \arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \text{termer av högre grad} \\ e^t &= 1 + t + t^2/2! + t^3/3! + \text{termer av högre grad} \\ \ln(1+t) &= t - t^2/2 + t^3/3 + \text{termer av högre grad} \end{aligned}$$

Detta ger

$$\begin{aligned} x \arctan x - x \sin x &= (x^2 - x^4/3 + x^6/5 + \dots) - (x^2 - x^4/6 + \dots) = \\ &= -x^4/6 + \text{termer av högre grad} \end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned} e^{-x^2} \ln(1+x^2) - x^2 &= (1 - x^2 + x^4/2 + \dots)(x^2 - x^4/2 + \dots) - x^2 = \\ &= (-1 - 1/2)x^4 + \text{termer av högre grad.} \end{aligned}$$

Detta ger

$$\begin{aligned} \frac{x \arctan x - x \sin x}{e^{-x^2} \ln(1+x^2) - x^2} &= \frac{-x^4/6 + \text{termer av högre grad}}{-3x^4/2 + \text{termer av högre grad}} = \\ &= \frac{x^4}{x^4} \cdot \frac{-1/6 + \text{termer med } x}{-3/2 + \text{termer med } x} \rightarrow \frac{-1}{-9} = \frac{1}{9}, \end{aligned}$$

när $x \rightarrow 0$.

Svar: 1/9.

4. (a) Med

$$a_n = \frac{n^2 x^{n+1}}{(n+1)!}$$

har vi

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \left| \frac{x^{n+2}}{x^{n+1}} \right| \cdot \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{(n+1)!}{(n+2)!} = \\ &= |x| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \frac{1}{n+2} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

när $n \rightarrow \infty$. Kvotkriteriet ger att serien är (absolut)konvergent för alla x .

Svar Potensserien är konvergent för alla x .

(b) Med $p(x) = \sum n^2 x^{n+1} / (n+1)!$ har vi att den sökta summan är $p(2)$ och att

$$p'(x) = \sum_{n=1} \frac{n^2(n+1)x^n}{(n+1)!} = \sum_{n=1} \frac{nx^n}{(n-1)!} = x \sum_{n=1} \frac{nx^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Vi har

$$\sum_{n=1} \frac{nx^{n-1}}{(n-1)!} = D\left(\sum_{n=1} \frac{x^n}{(n-1)!}\right) = D\left(x \sum_{n=0} \frac{x^n}{n!}\right) = D(xe^x) = (1+x)e^x.$$

Detta ger $p'(x) = x(1+x)e^x$.

Vi får med partiell integration

$$\begin{aligned} p(x) &= \int (x^2 + x)e^x dx = (x^2 + x)e^x - \int (2x + 1)e^x dx = \\ &= (x^2 + x)e^x - (2x + 1)e^x + \int 2e^x dx = (x^2 - x + 1)e^x + C. \end{aligned}$$

Eftersom $p(0) = 0$ är $C = -1$. Detta ger $p(2) = 3e^2 - 1$.

Svar: $3e^2 - 1$.

5. Ekvationen $2 = 8x/(x^2 + 3)$ blir efter omskrivning $x^2 - 4x + 3 = 0$, och har därför lösningarna $x = 1$ och $x = 3$. Om $f(x) = 8x/(x^2 + 3)$ kan volymen enligt skalformeln beräknas som

$$V = 2\pi \int_1^3 x \left(\frac{8x}{x^2 + 3} - 2 \right) dx$$

Vi har

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_1^3 \left(\frac{8(x^2 + 3) - 24}{x^2 + 3} - 2x \right) dx = 2\pi \int_1^3 \left(\frac{-24}{3(1 + (\frac{x}{\sqrt{3}})^2)} - 2x + 8 \right) dx = \\ &= 2\pi \left[-8\sqrt{3} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) - x^2 + 8x \right]_1^3 = 2\pi \left(8\sqrt{3} \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} \right) - 8 + 16 \right) = 16\pi \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{6} \pi \right) \end{aligned}$$

Svar: $16\pi(1 - \sqrt{3}\pi/6)$.

6. Vi låter $f(t)$ vara mängden (massan) salt (mätt i kg) i tanken vid tiden t (mätt i minuter) och $V(t)$ vara volymen vätska i tanken vid tiden t (mätt i liter).

Enligt uppgift har vi $V(t) = 10^3 - 6t$ och att

$$f'(t) = 6 \cdot \frac{1}{3} - 12 \cdot \frac{f(t)}{V(t)}$$

eftersom $f(x)/V(t)$ är koncentrationen salt i tanken vid tiden t . Vi har $f(0) = 0$, så funktionen löser begynnelsevärdesproblemet

$$y' + \frac{12}{10^3 - 6t}y = 2, \quad y(0) = 0.$$

Vi har

$$\int \frac{12}{10^3 - 6t} dt = -2 \ln(10^3 - 6t),$$

så $(10^3 - 6t)^{-2}$ är en integrerande faktor. Multiplikation med den ger ekvationen

$$D((10^3 - 6t)^{-2}y) = 2(10^3 - 6t)^{-2},$$

som integreras till

$$(10^3 - 6t)^{-2}y = (1/3)(10^3 - 6t)^{-1} + C.$$

Eftersom $y(0) = 0$ har vi att $C = -(1/3)10^{-3}$. Vi löser ut y och får

$$\begin{aligned} f(t) = y(t) &= (10^3 - 6t)/3 - 10^{-3}(10^3 - 6t)^2/3 = (10^3 - 6t)(1 - 10^{-3}(10^3 - 6t))/3 = \\ &= 2 \cdot 10^{-3}t(10^3 - 6t) = 2(t - 6 \cdot 10^{-3}t^2). \end{aligned}$$

Detta ger $f'(t) = 2(1 - 12 \cdot 10^{-3}t)$, som visar att $f(t)$ har sitt maximum när $t = 10^3/12$. Den maximala saltmängden i tanken är därför

$$f(10^3/12) = (1/6)(10^3 - 10^3/2) = 10^3/12.$$

Svar: Mängden salt vid tiden t minuter efter start är $2(t - 6 \cdot 10^{-3}t^2)$ kg. Maximala saltmängden är $10^3/12$ kg och det sker $10^3/12$ minuter efter start.

7. Sätter vi $f(x) = \ln x$ har vi $f'(x) = 1/x$ och $\sqrt{1 + f'(x)^2} = \sqrt{1 + x^2}/x$. Formeln för båglängd ger att den sökta längden är

$$L = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x} dx.$$

Vi gör variabelbytet $x = \tan t$ och har $dx = (1 + \tan^2 t) dt$ och $\sqrt{1 + x^2} = 1/\cos t$. Vi får

$$L = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1}{\cos t} \cdot \frac{1}{\tan x} \cdot (1 + \tan^2 t) dt = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \left(\frac{1}{\sin t} + \frac{\sin t}{\cos^2 t} \right) dt$$

Vi delar upp kalkylen i två integraler och gör i den första en omskrivning och variabelbytet $u = \cos t$:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1}{\sin t} dt = - \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sin t}{1 - \cos^2 t} dt = - \int_{1/\sqrt{2}}^{1/2} \frac{1}{(1-u)(1+u)} du = \\ &= -\frac{1}{2} \int_{1/\sqrt{2}}^{1/2} \left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u} \right) du = -\frac{1}{2} \left[\ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right| \right]_{1/\sqrt{2}}^{1/2} = -\frac{1}{2} \cdot \ln \left(\frac{3/2}{1/2} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \ln(3(\sqrt{2}-1)^2) \end{aligned}$$

Den andra integralen ger

$$I_2 = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sin t}{\cos^2 t} dt = \left[\frac{1}{\cos t} \right]_{\pi/4}^{\pi/3} = 2 - \sqrt{2}.$$

Summering ger längden $2 - \sqrt{2} - \ln(9 - 6\sqrt{2})/2$.

Svar: $2 - \sqrt{2} - \ln(9 - 6\sqrt{2})/2$.