Lösningar till MVE017 Matematisk analys i en variabel för I1 18-08-20

1. (a) Division med $x^2 + 1\,(> 0)$ ger

$$y' - \frac{x}{x^2+1}y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Vi har

$$-\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = -\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

så en integrerande faktor ges av

$$e^{-\ln(x^2+1)/2} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Multiplikation med den ger ekvationen

$$D\Big(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}y\Big) = \frac{1}{x^2+1}.$$

Integration och multiplikation med $\sqrt{x^2+1}$ ger

$$y = \sqrt{x^2+1}(\arctan x + C),$$

där C är en godtycklig konstant.

Svar: $y(x) = \sqrt{x^2+1}(\arctan x + C)$, där C är en godtycklig konstant.

(b) Ekvationen har den karakteristiska ekvationen $0 = r^2 - 2r = r(r-2)$, så lösningsformeln ger att den homogena ekvationen har lösningarna
$y_h = Ae^{0x} + Be^{2x} = A + Be^{2x}$, där A och B är godtyckliga konstanter.
Vi söker partikulärlösning genom ansatsen $y_p = a\cos x + b\sin x$ och har

$$\begin{aligned} y_p &= a\cos x + b\sin x \\ y_p' &= -a\sin x + b\cos x \\ y_p'' &= -a\cos x - b\sin x \end{aligned}$$

som i ekvationens vänster led ger $-(a+2b)\cos x - (b-2a)\sin x$ som alltså ska bli $\cos x$. Det ger $a + 2b = -1$ och $-2a + b = 0$ vilket ger $5a = -1$ och $5b = -2$.
Samtliga lösningar till ekvationen ges nu av $y = y_h + y_p =$
$= A + Be^{2x} - (\cos x + 2\sin x)/5$.

Svar: $y = A + Be^{2x} - (\cos x + 2\sin x)/5$, där A och B är godtyckliga konstanter.

2. (a) Kvadratkomplettering och omskrivning ger

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{0} \frac{x}{2+2x+x^2}\,dx &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\Big(\frac{2(x+1)}{1+(x+1)^2} - \frac{2}{1+(x+1)^2}\Big)\,dx = \\ &= \frac{1}{2}\Big[\ln(1+(1+x)^2) - 2\arctan(x+1)\Big]_{-1}^{0} = \\ &= \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1 - 2(\pi/4 - 0)) = (\ln 4 - \pi)/4 \end{aligned}$$

Svar: $(\ln 4 - \pi)/4$.

(b) Partiell integration och partialbråksuppdelning ger

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2}\arctan x\,dx &= -\frac{1}{x}\arctan x + \int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx = \\ &= -\frac{1}{x}\arctan x + \int \Big(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\Big)\,dx = \\ &= -\frac{1}{x}\arctan x + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) = \\ &= -\frac{1}{x}\arctan x + \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{x^2}{1+x^2}\Big).\end{aligned}$$

Svar: $-\arctan x/x + \ln(x^2/(1+x^2))/2$.

3. Vi har kända Maclaurinutvecklingar:

$$\begin{aligned}\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \text{ termer av högre grad} \\ e^t &= 1 + t + t^2/2! + t^3/3! + \text{ termer av högre grad}\end{aligned}$$

Detta ger

$$\begin{aligned}e^x - e^{-x} &= 2x + 2x^3/3! + 2x^5/5! + 2x^7/7! + \text{ termer av högre grad} = \\ &= 2(x + x^3/3! + x^5/5! + x^7/7! + \text{ termer av högre grad})\end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned}(e^x - e^{-x})\sin x &= 2(x + x^3/3! + x^5/5! + x^7/7! + \text{ termer av högre grad})\cdot \\ &\quad \cdot(x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + \cdots \text{ termer av högre grad})\end{aligned}$$

Maclarinpolynomet $p_7(x)$ till $f(x)$ består av alla termer av grad högst sju i denna produkt. Vi får

$$\begin{aligned}p_7(x) &= 2(x^2 + (-1/3! + 1/3!)x^4 + (1/5! - 1/(3!)^2 + 1/5!)x^6) = \\ &= 2x^2 + 2(1/60 - 1/36)x^6 = 2x^2 - (8/360)x^6 = 2x^2 - x^6/45.\end{aligned}$$

Svar: $2x^2 - x^6/45$.

4. (a) Med

$$a_n = \frac{5^{n-1}x^n}{2n(3n+1)}$$

har vi

$$\begin{aligned}
\Big|\frac{a_{n+1}}{a_n}\Big| &= \Big|\frac{x^{n+1}}{x^n}\Big| \cdot \frac{2n}{2(n+1)} \cdot \frac{3n+1}{3(n+1)+1} \cdot \frac{5^n}{5^{n-1}} \to |x| \\
&= 5|x| \cdot \frac{n^2}{n^2} \cdot \frac{2}{2+2/n} \cdot \frac{3+1/n}{3+4/n} \to 5|x|
\end{aligned}$$

när $n \to \infty$. Kvotkriteriet ger att serien är (absolut)konvergent när $5|x| < 1$ och divergent när $5|x| > 1$. Detta ger att konvergens när $|x| < 1/5$ och divergens när $|x| > 1/5$. När $|x| = 1/5$ är $x = \pm 1/5$.

När $x = -1/5$ får vi serien $\sum(-1)^n/(10n(3n+1))$, som är alternerande. Eftersom $1/(10n(3n+1))$ avtar mot 0 ger kriteriet för konvergens av alternerande serier att vi har konvergens när $x = -1/5$.
När $x = 1/5$ har vi serien $\sum 1/(10n(3n+1)$.
Vi sätter $a_n = 1/(10n(3n+1))$ och $b_n = 1/n^2$. Serien $\sum 1/n^2$ är känd som konvergent. Vi har att $a_n/b_n = n^2/(10n(3n+1)) \to 1/(10 \cdot 3) > 0$, så jämförelsekriteriet på gränsvärdesform ger att serierna med termer a_n respektiver b_n har samma förhållande till konvergens. Eftersom serien med termerna b_n är konvergent är alltså även serien med termerna a_n konvergent. Potensserien är därför konvergent när $x = 1/5$.

Svar När $x \in [-1/5, 1/5]$.

(b) Vi har $0 < 1/(n(n-3)) < 1/((n-3)(n-3)) = 1/(n-2)^2$ och att $\sum 1/n^2$ är konvergent, eftersom $2 > 1$. Jämförelsekriteriet ger att serien är konvergent. För partialsumman $S_N = \sum_{n=4}^{N} 1/(n(n-3))$ gäller

$$\begin{aligned}
S_N &= \frac{1}{3}\Big(\sum_{n=4}^{N} \frac{1}{n-3} - \frac{1}{n}\Big) = \frac{1}{3}\Big(\sum_{n=1}^{N-3} \frac{1}{n} - \sum_{n=4}^{N} \frac{1}{n}\Big) = \\
&= \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{N-2} - \frac{1}{N-1} - \frac{1}{N}\Big) \to \frac{1}{3}\Big(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\Big) = \frac{11}{9},
\end{aligned}$$

när $N \to \infty$.

Svar: 11/9.

5. Området i första kvadranten begränsas uppåt av $y = \sqrt{16 - x^2}$ och nedåt av $y = \sqrt{6x}$. Kurvornas skärningspunkt löser ekvationen $16 - x^2 = 6x$, dvs $0 = x^2 + 6x - 16 = (x+3)^2 - 25 = (x-2)(x+8)$. Bara $x = 2$ är aktuellt.

   Skalformen ger att kroppens volyn V ges av

$$\begin{aligned}
V &= 2\pi \int_0^2 x(\sqrt{16-x^2} - \sqrt{6x})\,dx = 2\pi\Big[-\frac{1}{3}(16-x^2)^{3/2} - \sqrt{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot x^{5/2}\Big]_0^2 = \\
&= \frac{2\pi}{15}\Big(-5(12\sqrt{12} - 16 \cdot 4) - \sqrt{6} \cdot 24\sqrt{2}\Big) = \frac{8\pi}{15}\Big(80 - 21\sqrt{12}\Big).
\end{aligned}$$

Svar: $8\pi(80-21\sqrt{12})/15$.

6. Omskrivning och variabelbytet $u=\cos x$, $du=-\sin x$ ger

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2\,dx}{\sin 2x+2\sin x} = \int \frac{2\,dx}{2\cos x\sin x+2\sin x} = \\ &= \int \frac{dx}{\sin x(\cos x+1)} = \int \frac{\sin x}{(1-\cos^2 x)(\cos x+1)}\,dx = \\ &= \int \frac{du}{(u^2-1)(u+1)} = \int \frac{du}{(u-1)(u+1)^2} \end{aligned}$$

Ansats för partialbråksuppdelning ger

$$\frac{1}{(u-1)(u+1)^2} = \frac{A}{u-1}+\frac{B}{u+1}+\frac{C}{(u+1)^2}.$$

Handpåläggning ger $A=1/4$, $C=-1/2$. Insättningn av (t.ex) $u=0$ ger sen $-1=-1/4+B-1/2$, dvs $B=-1/4$.

Detta ger

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4}\cdot\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u+1} = \frac{1}{4}\cdot\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos x+1} = \\ &= \frac{1}{4}\cdot\ln\left|\frac{(\cos x-1)^2}{\sin^2 x}\right|+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos x+1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\sin x}\right|+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos x+1} \end{aligned}$$

Svar: $(\ln|(\cos x-1)/\sin x|+1/(\cos x+1))/2$.

7. (a) Med

$$a_n = \frac{\cos(n\pi/3)}{n!}\cdot x^n$$

har man

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\cos((n+1)\pi/3)}{\cos(n\pi/3)}\right|\cdot\frac{n!}{(n+1)!}\cdot|x|.$$

Här är $|\cos(k\pi/3)|=1$, när k är delbart med 3 och $|\cos(k\pi/3)|=1/2$ annars. Detta ger

$$0\le\left|\frac{\cos((n+1)\pi/3}{\cos(n\pi/3}\right|\le 2,$$

vilket ger

$$0\le\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\le 2\cdot\frac{1}{n+1}\cdot|x|\to 0<1,$$

när $n\to\infty$. Instängningsregeln ger att $|a_{n+1}/a_n|\to 0$, när $n\to\infty$. Kvotkriteriet ger därför att potensserien konvergerar för alla x.

Svar: $(-\infty,\infty)$.

(b) Vi har via termvis derivering och omnumrering

$$
\begin{aligned}
p'' - p' + p &= \sum_{n=2} \frac{\cos(n\pi/3)}{(n-2)!} \cdot x^{n-2} - \sum_{n=1} \frac{\cos(n\pi/3)}{(n-1)!} \cdot x^{n-1} + \sum_{n=0} \frac{\cos(n\pi/3)}{n!} \cdot x^n = \\
&= \sum_{n=0} \frac{\cos((n+2)\pi/3)}{n!} \cdot x^n - \sum_{n=0} \frac{\cos((n+1)\pi/3)}{n!} \cdot x^n + \sum_{n=0} \frac{\cos(n\pi/3)}{n!} \cdot x^n = \\
&= \sum_{n=0} (\cos((n+2)\pi/3) - \cos((n+1)\pi/3) + \cos(n\pi/3)) \cdot \frac{x^n}{n!}.
\end{aligned}
$$

Addtionsformler för $\cos x$ ger

$$
\begin{aligned}
\cos((n+2)\pi/3) &= \cos(n\pi/3)\cos(2pi/3) - \sin(n\pi/3)\sin(2\pi/3) \\
\cos((n+1)\pi/3) &= \cos(n\pi/3)\cos(\pi/3) - \sin(n\pi/3)\sin(\pi/3)
\end{aligned}
$$

Vilket ger $\cos(n+2)\pi/3) - \cos((n+1)\pi/3) = -\cos(n\pi/3)$. Detta ger

$$
p'' - p + p = \sum_{n=0} (-\cos(n\pi/3) + \cos(\pi/3))x^n = 0
$$

(c) Vi har att $p(x)$ löser $y'' - y + y = 0$ som har den karakteristiska ekvationen $r^2 - r + 1 = 0$ som har lösningarna $r = (1 \pm i\sqrt{3})/2$, som i sin tur ger

$$
y = e^{x/2}\Big(A\cos(\sqrt{3}x/2) + B\sin(\sqrt{3}x/2)\Big).
$$

Eftersom $p(0) = 1$, och $p'(0) = 1/2$ ska vi ha $A = 1$. Derivering ger

$$
y' = e^{x/2}\Big(-(\sqrt{3}/2)\sin(\sqrt{3}x/2) + B(\sqrt{3}/2)\cos(\sqrt{3}x/2) + (1/2)\cos(\sqrt{3}x/2) + (B/2)\sin(\sqrt{3}x/2)\Big).
$$

Detta ger $y'(0) = \sqrt{3}B/2 + 1/2 = 1/2$ och $B = 0$.

Svar: $p(x) = e^{x/2}\cos(\sqrt{3}x/2)$.