

MATEMATISKA VETENSKAPER

Chalmers

Tentamen i MVE016 Matematisk analys i en variabel för I1.

Tid: 2017-01-11, kl 8.30 - 12.30.

Hjälpmedel: Inga, ej heller miniräknare (men formelblad medföljer).

Telefonvakt: Felix Held, tel 031-772 5325.

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.

Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.

Bonuspoäng från hösten 2016 inkluderas. Resultat meddelas via Ladok inom tre veckor.

Lösningar finns på kursens webbsida www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/mve016/1617/ senast 12/1.

Tidpunkt för granskning meddelas via mail.

Examinator: Jan Alve Svensson.

1. a) Lös differentialekvationen $(1 + x^2)y' + xy = x$. 3p

b) Lös differentialekvationen $y'' + 2y' + 2y = x$, $y(0) = -1/2$, $y'(0) = 1$. 4p

2. Beräkna

$$\text{a) } \int_2^3 \frac{1}{5 + x^2 - 4x} dx \quad \text{b) } \int \frac{\sin x \cos x}{(1 + \sin x)^2} dx.$$

3p+4p

3. Undersök om uttrycket

$$\frac{(e^x + e^{-x}) \cos x - 2}{x \arctan x - x^2}$$

har ett gränsvärde när $x \rightarrow 0$. Bestäm det i så fall.

6p

4. a) För vilka värden på x konvergerar potensserien

$$p(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1) \cdot 3^n} \cdot (x+2)^n?$$

(Dvs bestäm seriens konvergensintervall.)

b) Uttryck $p(x)$ med hjälp av elementära funktioner (dvs "vanliga" funktioner) och beräkna summan av serien

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

3p+3p

Var god vänd!

5. Kurvan $y = 1/(1+x^4)$ och linjen $y = 1/4$ avgränsar ett begränsat område i planet som får rotera runt y -axeln, så att en kropp uppstår. Beräkna kroppens volym. 6p

6. Ett företag har förvärvat skog vars timmervolym $y(t)$ (mätt i m^3) vid tiden t (mätt i år) antas följa den logistiska tillväxtekvationen

$$y' = ay\left(1 - \frac{y}{b}\right),$$

där a och b är positiva konstanter. Man bedömer att skogens timmervolym vid tiden för förvärvet är $b/10$. Efter hållbarhetsanalys bestäms att man ska börja avverka med konstant takt när timmervolymen är $b/2$.

När ska avverkningen börja och vilken avverkningstakt ska då hållas, för att timmervolymen i skogen därefter ska vara konstant? (Svaren kan innehåller parametrar.) 6p

7. Grafen till den deriverbara funktionen $f(x)$ har följande egenskap:

Om man i en godtycklig punkt $(a, f(a))$ drar normalen skär den x -axeln i $(b, 0)$. Triangeln med hörn i $(a, 0)$, $(a, f(a))$ och $(b, 0)$ har alltid arean 2.

Vilka möjligheter finns för $f(x)$, om man dessutom vet att $f(3) = 2$? 6p

8. Formulera och bevisa ett kriterium med vars hjälp man kan avgöra att vissa alternerande serier är konvergenta.

Kriteriet ska t.ex. kunna användas för att avgöra att $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n/n$ är konvergent. 6p