MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers

Tentamen i MVE016 Matematisk analys i en variabel för I1.
Tid: 2017-04-10, kl 14.00 - 18.00.
Hjälpmedel: Inga, ej heller miniräknare (men formelblad medföljer).
Telefonvakt: 031-772 5325.

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.

Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.

Bonuspoäng från hösten 2016 inkluderas. Resultat meddelas via Ladok inom tre veckor.

Lösningar finns på kursens webbsida www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/mve016/1617/ senast 11/4.

Examinator: Jan Alve Svensson.

---

1. a) Lös differentialekvationen $2yy' = x(y^2 + 1)$. Var noga med eventuell konstant i lösningen. 3p

   b) Lös differentialekvationen $y'' - 2y' + y = e^{2x}$. 4p

2. Beräkna

$$\text{a)} \quad \int \frac{1}{\sqrt{x}(x + 2\sqrt{x} + 2)}\,dx \qquad \text{b)} \quad \int_0^\infty \frac{2}{x^2 + 4x + 3}\,dx.$$

3p+4p

3. a) Bestäm Maclaurinpolynomet av grad 4 till funktionen $f(x) = \cos(x)e^{x^2/2} - 1$. 3p

   b) Undersök gränsvärdet av uttrycket

$$\frac{\cos(x)e^{x^2/2} - 1}{x^2 \arctan x^2},$$

   när $x \to 0$. Bestäm det om det existerar. 3p

4. a) För vilka värden på x konvergerar potensserien

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)} \cdot x^{2n+3}?$$

   (Dvs bestäm seriens konvergensintervall.) Argumentera noga!

   b) Uttryck $p(x)$ med hjälp av elementära funktioner (dvs ”vanliga” funktioner). 3p+3p

Var god vänd!

MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers

---

5. Kurvan $y = \sqrt{x^2 - 1}$ och linjerna $y = 1$, $x = 3$ avgränsar ett begränsat område i första kvadranten. Området roterar runt x-axeln så att en kropp uppstår. Beräkna kroppens volym. 6p

6. Baren 007 har investerat i en Martini-automat som automatiskt fyller glas med exakt dos. Glasen (själva behållaren) har formen av en rät cirklär kon med höjd 5 cm och radie 5 cm (i basen). Tyvärr läcker maskinen i konstant takt 1 ml/h (1 ml är 1 cm^3). Vid stängning placeras ett tom glas i maskinen för att undvika söl. Glaset fylls därför på, men man vet att det även avdunstar Martini i en takt som är proportionell mot vätskespegelns area. Proportionalitetskonstanten har bestämts till $1/(4\pi)$ ml/(cm^2 h).

   a) Till vilken höjd i glaset kan Martinin högst nå? 1p

   b) Låt $h(t)$ vara höjden (i cm) i glaset t h efter stängning. Ange en differentialekvation som $h(t)$ löser och ett begynnelsevärde. 2p

   c) Hur lång tid efter stängning är vätskans höjd i glaset 1 cm? 3p

   (Volymen av en rät cirkulär kon är $\pi r^2 h/3$ där h är konens höjd och r är basens radie.)

7. När grafen till $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, $1 \leq x \leq \sqrt{2}$, roterar runt x-axeln uppstår en yta. Beräkna ytans area. 6p

8. Formulera och bevisa Integralkriteriet för positiva serier. 6p

JAS