Komplettering för Analys i en variabel på I

J A S, ht 18

1 Serier och talföljder

1.1 Talföljder. Stewart 11.1

En *talföljd* (eller följd, eller sekvens av tal) är en oändlig uppräkning av reella tal:

$$a_1,\, a_2,\, a_3, \ldots,\, a_n,\, \ldots.$$

Talföljden betecknas ofta $\{a_n\}$ eller $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, eller ibland rentav bara med a_n. Det är inte nödvändigt att första talet i talföljden har index 1, man kan börja indiceringen på vilket (icke-negativt) heltal som helst. Observera att det inte finns något krav på att talen i uppräkningen ska vara olika. Ordningen i vilken talen kommer i talföljden är väsentlig; om man räknar upp talen i annan ordning blir det en annan talföljd. Ett sätt att tänka på en talföljd är att den vid olika tidpunkter anger en punkts läge på tallinjen. Då tänker man på indexen (1, 2, 3, ...) som de olika tidpunterna.

Exempelvis är $0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, \ldots$ en talföljd. Ett sätt att ange en talföljd är att, som ovan, räkna upp de första talen och sedan hoppas att läsaren förstår fortsättningen. Ett annat är att ge en definition av det n:te talet i följden. Exempelvis kan man ange en följd genom att säga att a_n är det n:te primtalet i storleksordning. Ett annat exempel får man om man sätter $a_n = 1/n$, där $n > 0$. I detta fall avses följden $1/1, 1/2, 1/3, \ldots$. Här har man en formel för hur talet med index (plats) n i talföljden kan beräknas med hjälp av n.

Definition 1.1 *En talföljd $\{a_n\}$ är konvergerar mot talet L, om det för varje $\epsilon > 0$, finns ett heltal N sånt att $|a_n - L| < \epsilon$, när $n \geq N$.*

Man skriver då $a_n \to L$, när $n \to \infty$, eller $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

Ett alternativt sätt att formulera detta är att talföljden a_n konvergerar mot L om varje omgivning till L innehåller alla a_n utom (möjligen) för ändligt många index n. Detta är *inte* det samma som att säga att varje omgivning till A innehåller alla *tal* i följden utom ändligt många. Exempelvis innehåller varje omgivning till 1 alla utom ändligt många av talen i följden $0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, \ldots$. Men om omgivningen till 1 inte innehåller talet 0 kommer *uppräkningen* av talen att ge tal (dvs 0) utanför omgivningen oändligt många gånger. Om man tänker på talföljden som en punkts läge på tallinjen vid olika tidpunkter, kan $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ formuleras som att varje omgivning (ϵ) till L innehåller alla punktens läge efter ett tag (N).

Om en talföljd inte konvergerar mot något tal är den *divergent.*

Exempelvis är talföljden $0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, \ldots$ divergent, medan talföljden $\{1/n\}$ är konvergent med gränsvärdet 0.

En talföljd a_n är *växande* om varje tal i uppräkningen är större än (eller lika med) sin föregångare: $a_n \leq a_{n+1}$ (för varje n). Den är *avtagande* om det motsatta förhållandet gäller. En följd som antingen är växande eller avtagande kallas *monoton.*

En talföljd a_n är uppåt (nedåt) begränsad om det finns ett tal som är större (mindre) än alla talen i uppräkningen (dvs talföljden).

Exempel 1.1 *Följden $a_n = 1 - 1/n$ är växande och uppåt begränsad av 1, medan följden $a_n = -n$ är avtagande, uppåt begränsad av 0 men inte nedåt begränsad.*

Sats 1.1 (**Monotonic Sequence Theorem**) *Varje uppåt begränsad växande talföljd är konvergent.*

På samma vis är varje nedåt begränsad avtagande följd konvergent.

Bevis. Låt a_n beteckna talföljden. Mängden av tal som ingår i den är uppåt begränsad och har därför en minsta övre begränsning L. (Detta är en grundläggande egenskap hos de reella talen som på svenska brukar kallas *supremumaxiomet*. Det ingår inte i denna kurs.) En omgivning till L innehåller något tal a_{n_0} ur talföljden, eftersom L är den *minsta* övre begränsningen. Eftersom följden är växande gäller att $a_{n_0} \leq a_n \leq a$, när $n \geq n_0$, så varje omgivning till L innehåller alla a_n utom för högst ändligt många index n. ■

1.2 Allmänt om serier. Stewart 11.2

När $\{a_n\}$ är en talföljd kallas uttrycket

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

för en *serie*. Serien här börjar med index $n = 1$, men det är inte nödvändigt. När inga missförstånd anses kunna uppstå skrivs vänstra ledet ovan ofta $\sum_n a_n$, så att man själv får begripa med vilket värde på n man börjar och att n fortsätter mot ∞.

Det är viktigt att förstå att oändligt många tal inte alltid kan summeras till något vettigt. Talföljden n ger serien $1 + 2 + \cdots + n + \cdots$ som förstås inte kan summeras till något vettigt. Inte heller talföljden $1/n$ kan summeras, men det är svårare att förstå. Däremot kan serien man får av talföljden $1/n^2$ beräknas. Ett berömt resultat är nämligen

$$1 + 1/2^2 + 1/3^2 + \cdots + 1/n^2 + \cdots = \pi^2/6.$$

Men, vad ska egentligen likheten i detta betyda? Vad betyder det att summera oändligt många termer?

Till serien $\sum a_n$ kan man bilda så kallade *partialsummor* (eller delsummor). Den n:te partialsumman är

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

Här används en ny bokstav i som index för n har nu en fix betydelse. Den femte partialsumman ($n = 5$) till $\sum_n 1/n^2$ är t.ex. $s_5 = \sum_{i=1}^{5} 1/i^2 = 1 + 1/4 + 1/9 + 1/16 + 1/25 = 5269/3600$.

Till Talföljden $\{a_n\}$ har vi bildat serien $\sum_n a_n$, där talen i talföljden dyker upp som termer. Till serien har vi i sin tur bildat en ny talföljd $\{s_n\}$ av partialsummor. Det är naturligt att vilja definiera seriens summa som gränsvärdet av partialsummorna:

Definition 1.2 *En serie $\sum_n a_n$ är* konvergent *om dess följd av partialsummor $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ är konvergent. Annars är den* divergent.

Om serien är konvergent och gränsvärdet av partialsummorna är s säger vi att seriens summa *är s och skriver $\sum_n a_n = s (= \lim_{n\to\infty} s_n)$.*

En viktig serie är den *geometriska* serien. Låt x vara ett tal $\neq 1$. Serien $\sum_{n=0} x^n$ har då partialsumman $s_n = 1+x+x^2+\cdots+x^n$. Man ser genom multiplikation att $(1-x)S_n = 1-x^{n+1}$, så $S_n = (1-x^{n+1})/(1-x)$. När $x = 1$ är $S_n = n + 1$.

Av detta ser vi att s_n har ett gränsvärde $(1/(1 - x))$ precis när $|x| < 1$.

Serien $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ är konvergent med summan

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

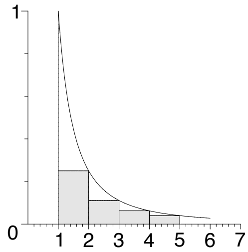
när $|x| < 1$ och divergent annars.

Exempel 1.2 *Serien $\sum_{n=1} 1/n^2$ är konvergent.*

Dess partialsummor s_n bildar en växande följd av tal som är uppåt begränsad. Vi har nämligen (se figuren nedan)

$$s_n = 1 + 1/2^2 + \ldots + 1/n^2 \leq 1 + \int_1^n 1/x^2\,dx = 1 + \Big[-\frac{1}{x}\Big]_1^n = 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

Vi har därmed sett att seriens summa har mening, men inte lyckats beräkna den. Att summan blir $\pi^2/6$ är väsentligt svårare att visa.



Sats 1.2 (**Stewart 11.2 Theorem 6**) *Om serien* $\sum_n a_n$ *är konvergent, så gäller att* $a_n \to 0$, *när* $n \to \infty$.

Bevis. Om s_n betecknar seriens n:te partialsumman, så vet vi att följden $\{s_n\}$ har ett gränsvärde s, när $n \to \infty$. Följden $\{s_{n-1}\}$ har förstås samma gränsvärde s. Vi har

$$a_n = s_n - s_{n-1} \to s - s = 0,$$

när $n \to \infty$. ■

Det är viktigt att förstå att omvändningen till satsen *inte* gäller (i allmänhet).

Exempel 1.3 *Serien* $\sum_{n=0} e^{1/n}$ *är divergent, eftersom* $e^{1/n}$ *har gränsvärdet* 1 *när* $n \to \infty$.

Exempel 1.4 *Serien* $\sum_{n=1} 1/n$ *är divergent* trots *att* $1/n \to 0$, *när* $n \to \infty$.

Seriens partialsummor bildar nämligen en växande följd som inte är uppåt begränsad:

$$s_n = 1/1 + 1/2 + \ldots + 1/n \geq \int_1^{n+1} 1/x\,dx = \ln(n+1)$$

Här har vi tolkat s_n som en vänstersumma till den avtagande funktionen $f(x) = 1/x$ på intervallet $[1, n+1]$. Eftersom $\ln(n+1) \to \infty$, när $n \to \infty$, gör även s_n det.

En serie $\sum_n a_n$, där alla termer a_n är > 0 kallas för en *positiv* serie.

En serie där termerna turas om att vara > 0 och < 0 kallas en *alternerande* serie. En sådan kan skrivas $\sum_n (-1)^n a_n$, där alla a_n är > 0. För alternerande serier gäller

Sats 1.3 (★ Alternating Series Test) *Om* $\sum_{n=1}(-1)^{n+1}a_n$ *är en alternerande serie där* $a_n > 0$ *är en följd som* ***avtar*** *mot* 0, *så är serien konvergent.*

Som vanligt är det inte väsentligt att serien börjar med index 1. Vilket annat heltal som helst skulle fungera lika bra, men argumentationen i beviset nedan bygger på att första termen i serien är positiv. Skulle den inte vara det kan man först multiplicera serien med -1.

Bevis. Enligt förutsättningen gäller $0 < a_{n+1} < a_n$, för alla n. Vi har

$$s_{2n} = (a_1 - a_2) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n}) = s_{2n-2} + (a_{2n-1} - a_{2n}) > s_{2n-2},$$

så partialsummor med *jämnt* index bildar en växande följd. Den är uppåt begränsad eftersom

$$s_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} < a_1$$

Låt s vara gränsvärdet av dessa partialsummor med *jämnt* index när $n \to \infty$. Vi har $s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1}$. Eftersom $a_n \to 0$ ser vi nu att även de partialsummor med udda index har gränsvärdet s, när $n \to \infty$. Därmed är serien konvergent. ■

Exempel 1.5 *Serien* $\sum_n (-1)^{n+1}/n$ *är konvergent eftersom den är alternerande och följden* $1/n$ *avtar mot* 0.

1.3 Positiva serier. Stewart 11.3 – 4.

Det kan kännas nedslående att det är svårt att beräkna seriers summor även om vi vet att de är konvergenta. Men det är tillräckligt intressant att kunna avgöra om en serie konvergerar eller divergerar för att det ska vara mödan värt att systematisera frågan. För en positiv serie är dess följd av partialsummor s_n växande och är därför konvergent precis när den är uppåt begränsad. Detta faktum gör att frågan om konvergens för positiva serier är särskilt enkel att besvara i flera fall. Det räcker att avgöra om följden av partialsummor är uppåt begränsade eller ej.

1.3.1 Jämförelsekriterier

Sats 1.4 (★ Integralkriteriet, The Integral Test) *Antag att $f(x)$ är en* ***avtagande*** *kontinuerlig funktion som är positiv ($f(x) > 0$) på intervallet $[0, \infty)$. Sätt $f(n) = a_n$. Då är $\int_0^\infty f(x)\,dx$ och $\sum_{n=0} a_n$ antingen båda konvergenta eller båda divergenta.*

Här är valet av den nedre gränsen som 1 oväsentligt; det fungerar lika bra med vilket (hel)tal som helst.

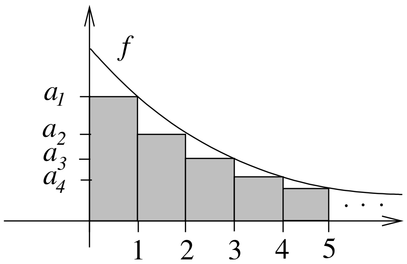


Fig 4. $S_5 - a_0$ är mindre $\int_0^5 f(x)\,dx$.

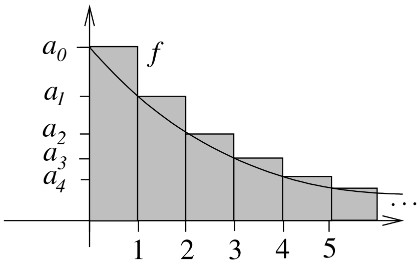


Fig 5. S_5 är större än $\int_0^6 f(x)\,dx$.

Bevis Eftersom $f(n) > 0$ gäller att alla $a_n > 0$ vilket ger att följden av partialsummor $\{s_n\}$ är växande. Serien är alltså konvergent precis när dess partialsummor är uppåt begränade, enligt satsen om monotona följders konvergens.

Om vi delar in intervallet $[0, n]$ i n lika stora delar så är $s_n - a_0$, där s_n är n:te partialsumman till serien, en högerersumma till $f(x)$ på $[0, n]$. Eftersom en högersumma till en avtagande positiv funktion är $\leq$ än integralen över intervallet gäller

$$s_n - a_0 = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq \int_0^n f(x)\,dx.$$

Detta ger

$$s_n \leq a_0 + \int_0^n f(x)\,dx.$$

Den n:te partialsumman s_n är samtidigt en vänstersumma till $f(x)$ på $[0, n+1]$. Eftersom en vänstersumma till en avtagande positiv funktion är $\geq$ intergralen över intervallet gäller

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n \geq \int_0^{n+1} f(x)\,dx.$$

Antag nu att integralen konvergerar, så att $\int_0^\infty f(x)\,dx$ är ett tal. Då gäller att $s_n \leq a_0 + \int_0^n f(x)\,dx \leq a_0 + \int_0^\infty f(x)\,dx$ för varje n, är den växande följden av partialsummor uppåt begränsad och därmed konvergent.

Antag nu att integralen divergerar. Då gäller att $\int_0^n f(x)\,dx \to \infty$, eftersom funktionen är positiv. Eftersom $\int_0^{n+1} f(x)\,dx \leq s_n$ gäller därför att $s_n \to \infty$, när $n \to \infty$. Detta ger att serien är divergent. ■

En viktig slutsats är

Serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

är divergent när $p \leq 1$ och konvergent när $p > 1$

Man jämför serien med $\int_1^\infty (1/x^p)\,dx$, som är konvergent precis när $p > 1$.

Sats 1.5 (Jämförelsekriteriet, The Compariason Test) *Antag att $\sum_n a_n$ och $\sum_n b_n$ är positiva serier med $a_n \leq b_n$, för alla n.*

- *Om $\sum_n a_n$ är divergent så är $\sum_n b_n$ divergent.*
- *Om $\sum_n b_n$ är konvergent så är $\sum_n a_n$ konvergent.*

Bevis. Låt s_n och t_n beteckna följderna av partialsummor till $\sum_n a_n$ respektive $\sum_n b_n$. Båda dessa följder är växande eftersom alla termer är positiva och därför konvergenta precis när de är uppåt begränsade. Förutsättningarna ger $s_n \leq t_n$ för alla n.

Om första serien är divergent är s_n inte uppåt begränsad och då kan heller inte t_n vara det, eftersom $s_n \leq t_n$ för alla n. Alltså är även andra serien divergent.

Om andra serien är konvergent är följden t_n uppåt begränsad och därmed är även s_n det, eftersom $s_n \leq t_n$ för alla n. Detta ger att första serien är konvergent. ∎

Exempel 1.6 *Serien $\sum_n \cos^2(n)/n^2$ är konvergent.*

Vi jämför med $\sum_i 1/n^2$ som vi vet är konvergent och utnyttjar att $\cos^2(n)/n^2 \leq 1/n^2$.

Sats 1.6 (★ Jämförelsekriteriet på gränsvärdesform, The Limit Compariason Test) *Antag att $\sum_n a_n$ och $\sum_n b_n$ är positiva serier. Om*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0,$$

så gäller att $\sum_n a_n$ och $\sum_n b_n$ båda konvergerar eller båda divergerar.

Bevis. Eftersom $c > 0$, finns tal m och M, så att $0 < m < c < M$. Eftersom c är gränsvärdet av a_n/b_n, när $n \to \infty$, finns det ett N, så att det när $n > N$ gäller att

$$m < \frac{a_n}{b_n} < M,$$

vilket efter multiplikation med $b_n > 0$ ger

$$mb_n < a_n < Mb_n.$$

Om $\sum b_n$ konvergerar gör även $\sum Mb_n$ det. Eftersom $0 < a_n < Mb_n$, när $n > N$, ger jämförelsekriteriet att även $\sum a_n$ konvergerar.

Om $\sum b_n$ divergerar gör även $\sum mb_n$ det. Eftersom $0 < mb_n < a_n$, när $n > N$, ger jämförelsekriteriet att även $\sum a_n$ divergerar. ∎

Exempel 1.7 *Vi vill avgöra om $\sum_n 1/(n^2 - 50n/3)$ är konvergent eller divergent.*

Serien är inte positiv eftersom termerna är negativa i början, men när n blir stort ($n > 50/3$) är de det. Det gör att vi kan använda satsen. Vi jämför med $\sum_n 1/n^2$, som vi vet är konvergent. Vi har

$$\frac{1/(n^2 - 50n/3)}{1/n^2} = \frac{n^2}{n^2 - 50n/3} \to 1,$$

när $n \to \infty$. Eftersom $1 > 0$ och $\sum 1/n^2$ är konvergent, är därför även $\sum_n 1/(n^2 - 50n/3)$ konvergent enligt jämföreslsekriteriet på gränsvärdesform.

Med jämförelsekriteriet skulle vi kunna resonerat att $50n/3 < n^2/2$ när n är stort ($n > 100/3$). Detta ger $1/(n^2 - 50n/3) < 1/(n^2 - n^2/2) = 2/n^2$. Eftersom $2\sum 1/n^2$ är konvergent är även $\sum_n 1/(n^2 - 50n/3)$ konvergent enligt jämföreslsekriteriet.

1.4 Allmänna serier. Stewart 11.5 – 6

En serie $\sum_n a_n$, där inget särskilt antas om tecknet på a_n, är *absolutkonvergent* om (den positiva) serien $\sum_n |a_n|$ är konvergent.

Sats 1.7 (★) *Om $\sum_n a_n$ är absolutkonvergent, så är den också konvergent.*

Bevis. Tricket är att skriva serien som en skillnad av två konvergenta positiva serier. Vi har $a_n = |a_n| - (|a_n| - a_n)$. De två serierna

$$\sum_n |a_n|, \quad \sum_n (|a_n| - a_n).$$

är båda positiva. Den första är konvergent enligt antagandet. För den andra har vi $0 \leq |a_n| - a_n \leq 2|a_n|$, så jämförelsekriteriet ger att även denna är konvergent. Av detta följer att

$$\sum_n a_n = \sum_n |a_n| - \sum_n (|a_n| - a_n).$$

är konvergent. ■

Exempel 1.8 *Serien $\sum_{n=1} \cos(n)/n^2$, som varken är alternerande eller positiv, är konvergent eftersom den är absolutkonvergent.*

En serie som är konvergent, men inte absolutkonvergent, sägs vara *betingat* konvergent. Ett exempel på en sådan är den alternerande serien $\sum_{n=1}(-1)^n/n$.

Sats 1.8 (★ Kvotkriteriet, The Ratio Test) *Låt $\sum_n a_n$ vara en serie, sådan att $|a_{n+1}/a_n|$ har ett gränsvärde L, när $n \to \infty$. Om $L < 1$ är serien absolutkonvergent. Om $L > 1$ är den divergent. Ingen slutsats kan dras om $L = 1$.*

Bevis. Vi ska jämföra serien $\sum_n |a_n|$ med en geometrisk serie. Antag först att $|a_{n+1}/a_n| \to L < 1$. Välj ett tal r mellan L och 1: $L < r < 1$. För stora värden på n, låt oss säga $n \geq N$, kommer då $|a_{n+1}/a_n|$ att vara $< r$. Detta ger att $|a_{n+1}| < |a_n| r$, när $n \geq N$. Vi får $|a_{N+1}| < |a_N| r$ och sedan $|a_{N+2}| < |a_{N+1}| r < |a_N| r^2$. Upprepning ger

$$|a_{N+k}| < |a_N| r^k, \; k \geq 0.$$

Vi har

$$\sum_{n=N} |a_n| = \sum_{k=0} |a_{N+k}| = |a_N| + |a_{N+1}| + |a_{N+2}| + \cdots.$$

Eftersom $r < 1$ är $\sum_{k=0} |a_N| r^k = |a_N| \sum_{k=0} r^k$ konvergent. Jämförelsekriteriet ger nu att $\sum_{n=N} |a_n|$ är konvergent och därför är $\sum_n a_n$ absolutkonvergent.

När $|a_{n+1}/a_n| \to L > 1$ gäller att $|a_{n+1}| > |a_n|$, när n är stort. Alltså kan a_n inte gå mot 0, när $n \to \infty$, så serien $\sum_n a_n$ är divergent. ■

Exempel 1.9 *Avgör för vilka a som $\sum_{n=1} a^n/n$ är konvergent.*

Med $|a_n| = |a|^n/n$ har vi $a_{n+1}/a_n = |a|n/(n+1)$ som har gränsvärdet $L = |a|$, när $n \to \infty$. Serien är alltså (absolut)konvergent när $|a| < 1$ och divergent när $|a| > 1$. När $a = 1$ är serien divergent (harmoniska serien) och när $a = -1$ är den konvergent (enligt kriteriet för alternaterande serier).

Exemplet illustrerar att ingen slutsats kan dras när $(|a| =)L = 1$.

2 Potensserier

2.1 Allmänt om potensserier. Stewart 11.8

En serie av formen $\sum_{n=0} a_n(x-a)^n$, där x är en variabel och a ett tal, kallas en *potensserie* (kring a). Talen a_n (som antas kända) kallas seriens *koefficienter*. I potensserier är det viktigt att man startar indiceringen så att inga negativa potenser av x förekommer.

Det första problemet som dyker upp är att försöka bestämma för vilka x som serien kan summeras till ett tal: för vilka värden på x konvergerar serien?

Man kan tänka på potensserier som en generalisering av polynom. Seriens partialsummor är polynom med variabeln x. Generaliseringen består naturligtvis i att vi nu tillåter oss att ta med oändligt många termer. Nackdelen blir då förstås att vi inte kan vara säkra på att serien summerar till ett tal för givet x.

Vi har flera gånger råkat ut för att de elementära funktionerna inte räcker till för att genomföra kalkyler. Ur denna synvinkel kan vi tacksamt ta emot potensserier som ett nytt (och stort) tillskott av funktioner med definitionsmängd de x för vilka de konvergerar.

Sats 2.1 (★ Stewart appendix F) *Antag att $\sum_n a_n x^n$ konvergerar när $x = x_0 \neq 0$. Då är serien (absolut)konvergent när $|x| < |x_0|$. Om serien divergerar när $x = x_1$ gäller att den divergerar när $|x| > |x_1|$.*

Om vi ersätter x med $x - a$ i serien ser vi att om $\sum_n a_n(x-a)^n$ konvergerar för $x = x_0$, konvergerar den (absolut) när $|x - a| < |x_0 - a|$.

Bevis. Idén är att jämföra $\sum_n |a_n x^n|$ med en geometrisk serie.

Eftersom $\sum_n a_n x_0^n$ förutsätts konvergent gäller att $\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$. Det betyder att talföljden $a_n x_0^n$ är begränsad. Låt oss säga att $|a_n x_0^n| < M$, för alla n.

Antag att $|x| < |x_0|$ och sätt ($|x_0| > 0$) $r = |x|/|x_0| < 1$. Vi har då att $|a_n x^n| = |a_n x_0^n| r^n < M r^n$. Eftersom $0 < r < 1$ konvergerar den geometriska serien $M \sum_n r^n$ och därmed, enligt jämförelsekriteriet, även den (positiva) serien med mindre termer $\sum_n |a_n x^n|$. Alltså är $\sum_n a_n x^n$ absolutkonvergent när $|x| < |x_0|$.

Om potensserien skulle konvergera för något x med $|x| > |x_1|$, skulle serien konvergera för nör $x = x_1$ enligt vad som just vistas. Detta strider mot förutsättningen. Alltså är potensserien divergent för varje x med $|x| > |x_1|$. ■

Av satsen följer det att ett av följande ömsesidigt uteslutande fall kan inträffa för en potensserie $\sum_n a_n(x-a)^n$:

1. Serien är absolutkonvergent för alla x,
2. det finns ett tal $R > 0$, så att serien är absolutkonvergent för alla x sådana att $|x - a| < R$ och divergent för alla x med $|x - a| > R$
3. serien konvergerar bara när $x = a$.

Talet R kallas seriens *konvergensradie* och det är brukligt att sätta $R = \infty$ i fall 1) och $R = 0$ i fall 2).

Om vi tänker på en potensserie $\sum_n a_n(x-a)^n$ som en funktion, är den alltså definierad för alla x sådan att $|x - a| < R$, där R är seriens konvergensradie. Den är definitivt inte definierad när $|x - a| > R$. Mängden (som bestäms av) $|x - a| < R$ är ett symmetriskt intervall runt a där ändpunkterna $a \pm R$ inte ingår. Beträffande ändpunkterna så kan ingen av dem, en men inte den andra, eller båda ingå i potensseriens definitionsmängd. De x för vilka serien konvergerar kallas seriens *konvergensintervall.*

För att bestämma en series konvergensradie kan man ofta använda kvotkriteriet för positiva serier.

Sats 2.2 *Om $|a_{n+1}/a_n| \to L$, när $n \to \infty$, så har potensserien $\sum_n a_n(x-a)^n$ konvergensradien $R = 1/L$.*

Här ska $1/L$ tolkas som $R = \infty$ när $L = 0$ och som $R = 0$, när $L = \infty$.

Bevis. Vi har, enligt förutsättningen, att $|a_{n+1}(x-a)^{n+1}/(a_n(x-a)^n)| = |a_{n+1}/a_n||x-a|$ har gränsvärdet $L|x - a|$.

Enligt kvotkriteriet har man absolutkonvergens när $L|x - a| < 1$, men inte när $L|x - a| > 1$.

Detta ger att konvergensradien är $R = 1/L$. ■

Exempel 2.1 *För vilka x konvergerar potensserien*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{1-n^2}(x-2)^n?$$

Vi har här att $|a_{n+1}/a_n| = (1+1/n)(n^2-1)/(n^2+2n)$, som har gränsvärdet $L = 1$, när $n \to \infty$. Konvergensradien är $R = 1/L = 1/1$. Serien konvergerar alltså (absolut) när $|x-2| < 1$.

När $x = 1$ får vi den alternerande serien $\sum_{n=2}(-1)^n n/(1-n^2)$ med termer som avtar mot 0 och därför är konvergent.

När $x = 3$ får vi $-\sum_{n=2} n/(n^2-1)$. Eftersom $n/(n^2-1) > n/n^2 = 1/n$ och serien $\sum_{n=2} 1/n$ är divergent är potensserien divergent när $x = 3$.

Potensserien konvergerar alltså när x ligger i intervallet $[1, 3)$. $\square$

Det vara på sin plats att påpeka att man inte behöver använda sats 2.2 för att bestämma konvergensradien. Om man i stället i exemplet använder kvotkriteriet för vanliga serier får man kvoten

$$\left|\frac{(n+1)(x-2)^{n+1}}{1-(n+1)^2} \cdot \frac{1-n^2}{n(x-2)^n}\right|$$

som har gränsvärdet $|x-2|$, när $n \to \infty$. Det betyder att serien konvergerar när $|x-2| < 1$ och divergerar när detta uttryck är > 1. Det ger konvergensradien 1.

Exempel 2.2 *Bestäm konvergensradien till*

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 4^n (x-a)^{3n}.$$

Observera att i detta exempel är bara var tredje koefficient $\neq 0$, så kvoten av koefficienter $|a_{n+1}/a_n|$ saknar gränsvärde (är inte ens alltid definierad). Vi använder det vanliga kvotkriteriet och får kvoten

$$\left|\frac{4^{n+1}(x-a)^{3(n+1)}}{4^n(x-a)^{3n}}\right|,$$

som har gränsvärdet $4|x-a|^3$ när $n \to \infty$. Enligt kvotkriteriet har vi konvergens när $4|x-a|^3 < 1$, dvs när $|(x-a)| < 4^{-1/3}$ och divergens när $4|x-a|^3 > 1$. Potensseriens konvergensradien är alltså $R = 4^{-1/3}$.

Alternativt skulle vi kunna konstatera att serien är en geometrisk serie om vi sätter $r = 4(x-a)^3$. Det ger att serien är konvergent precis när $|x-a| < 4^{-1/3}$ och dessutom att det då gäller att

$$P(x) = \frac{1}{1-r} = \frac{1}{1-4(x-a)^3}.$$

$\square$

Exempel 2.3 *Bestäm konvergensradien till* $P(x) = \sum_{n=0} a_n x^n$, *där*

$$a_n = \begin{cases} 4^n & \textit{när} \quad n \textit{ är jämnt} \\ 4^{-n} & \textit{när} \quad n \textit{ är udda} \end{cases}$$

Även här saknar a_{n+1}/a_n gränsvärde. Vi löser problemet genom att skriva $P(x)$ som en summa av två potensserier.

$$P(x) = \sum_n 4^{2n} x^{2n} + \sum_n 4^{-2n-1} x^{2n+1}$$

Här har $p_1(x) = \sum_n 4^{2n} x^{2n}$ konvergensradien $1/4$, medan $p_2(x) = \sum_n 4^{-2n-1} x^{2n+1}$ har konvergensradien 4. Det betyder att $P(x)$ konvergerar när $|x| < 1/4$.

När $4 > |x| > 1/4$ divergerar $p_1(x)$, medan $p_2(x)$ konvergerar. Alltså kan inte $P(x)$ konvergera (för då hade $p_1(x) = P(x) - p_2(x)$ konvergerat) när $4 > |x| > 1/4$.

Potensserien $P(x)$ har alltså konvergensradien $1/4$.

2.2 Derivering av potensserier. Stewart 11.9

Som tidigare nämnts kan vi tänka på potensserier som ett tillskott till vårt förråd av funktioner. Det blir därför naturligt att fråga om sådana funktioner är deriverbara och om vi kan bestämma primitiva funktioner till dem.

Det visar sig att potensserier går utmärkt att derivera (inuti sina konvergensintervall). I själva verket går de att derivera hur många gånger som helst! För att förstå detta kan man använda följande sats upprepade gånger.

Sats 2.3 (Termvis derivering) *Antag att* $P(x) = \sum_{n=0} a_n x^n$ *har konvergensradie* $R > 0$. *Då är* $P(x)$ *deriverbar när* $|x| < R$ *och*

$$P'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Satsen innehåller (bland annat) påstendet att högra ledet i likheten ovan konvergerar när $|x| < R$. Den ”termvisa derivatan” har alltså en konvergensradie som är minst lika stor som den ursprungliga potensserien. Om vi kombinarar sats 2.3 med sats 2.4 som vi ska visa senare ser vi att $P'(x)$ och $P(x)$ i själva verket har **samma konvergensradie**.

Vi accepterar satsen utan bevis.

Genom att ersätta x med $x - a$ ser vi att vi också kan derivera $P(x-a) = \sum_n a_n(x-a)^n$ termvis. Derivatan blir $\sum_n n a_n (x-a)^{n-1}$.

2.3 Några ”välkända” serier. Stewart 11.10

Framställningen här avviker från den i Stewart. Vi utnyttjar här att vi kan lösa andra ordningens linjära differentialekvationer med konstanta koefficienter (Stewart 17.1 – 2).

De mest fantastiska samband kommer nu att uppenbara sig! Vi kommer t.ex. att kunna räkna ut $\ln(3/2)$ med god approximation bara genom att addera, multiplicera och dividera. Lika så kommer vi att kunna beräkna $\sin(1)$ utan att mäta på en enhetscirkel.

I detta avsnitt kommer vi flera gånger att använda symbolen $n!$, (där n är ett naturligt tal,) som betyder produkten av alla heltal $1, 2, \ldots n$, dvs $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$. Man brukar också sätta $0! = 1$ av praktiska skäl. Symbolen $n!$ utläser ”n-fakultet”.

Vi börjar med potensserien $P(x) = \sum_{n=0} x^n/n!$. Kvotkriteriet ger konvergensradien $R = \infty$. Potensserien är alltså (absolut)konvergent för alla x.

Termvis derivering ger $P'(x) = \sum_{n=1} x^{n-1}/(n-1)!$ (giltigt för alla x) som faktiskt är $P(x)$, med annan indicering. Vi har alltså $P'(x) = P(x)$, så $P(x) = Ce^x$, för någon konstant C.

Men $P(0) = 1$, så $P(x) = e^x$ (för alla värden på x). I ett slag har vi beräknat oändligt många (en för varje reellt tal x) oändliga summor!

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \text{ , för alla } x}$$

Vi låter $P(x) = \sum_{n=0}(-1)^n x^{2n}/(2n)!$ och ser att $P'(x) = \sum_{n=1}(-1)^n x^{2n-1}/(2n-1)!$ och $P''(x) = \sum_{n=1}(-1)^n x^{2(n-1)}/(2(n-1))!$ som är $-P(x)$, med annan indicering. Detta ger $P''(x) = -P(x)$ och sedan $P(x) = A\cos x + B \sin x$.

Men $P(0) = 1$ och $P'(0) = 0$, så $A = 1$ och $B = 0$, så $P(x) = \cos x$. Detta är giltigt för x med $|x| < R$, där R är konvergensradien för $P(x)$.

Kvoten av absolutbeloppet av två på varandra följande termer i $P(x)$ är $|x^2|(2n+2)^{-1}(2n+1)^{-1}$ som har gränsvärdet 0, när $n \to \infty$. Detta ger att $P(x)$ har oändlig konvergensradie. Vi får alltså

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \cos x \text{ , för alla } x}$$

Derivering av detta ger $\sum_{n=1}(-1)^n x^{2n-1}/(2n-1)! = -\sin x$, för alla x. Ny indicering ger sedan

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x \text{ , för alla } x}$$

För att komma vidare behöver vi en konsekvens av sats 3.3 av generell karaktär.

Sats 2.4 (Termvis integration) *Om* $P(x) = \sum_{n=0} a_n(x-a)^n$ *har konvergensradie* R*, så är*

$$\int P(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + C$$

när $|x-a| < R$*.*

Bevis. Enligt satsen om termvis derivering är derivatan av högra ledet $P(x)$.

För att få påståendet om giltigheten att stämma, måste vi visa att serien i högra ledet är (absolut)konvergent när $|x-a| < R$, dvs att konvergensradien inte minskar vid termvis integration.

Vi har att $P(x)$ är absolutkonvergent när $|x-a| < R$. Sätt

$$Q(x) = \sum_{n=0} a_n(x-a)^{n+1}/(n+1) = (x-a)\sum_{n=0} a_n(x-a)^n/(n+1).$$

Eftersom

$$\frac{|a_n||x-a|^n}{n+1} \leq |a_n||x-a|^n$$

är även $Q(x)$ absolutkonvergent när $|x-a| < R$. ■

Vi har $\sum_{n=0} x^n = 1/(1-x)$, när $|x| < 1$, så vi har också $\sum_{n=0}(-x)^n = \sum_{n=0}(-1)^n x^n = 1/(1+x)$ och $\sum_{n=0}(-1)^n x^{2n} = 1/(1+x^2)$, när $|x| < 1$.

Termvis integration ger nu det mesta av

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \ln(1+x), \text{ när } -1 < x \leq 1$$

och

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan x, \text{ när } |x| \leq 1,$$

eftersom likheterna stämmer när $x = 0$. Konvergensintervallet för den första serien är $(-1, 1]$ och för den andra $[-1, 1]$, vilket vi ser med kriteriet för alternerade serier och att den harmoniska serien är divergent. Båda leden i de två likheterna har samma derivator på det inre av definitionsmängden (konvergensintervallet), är kontinuerliga och stämmer överens när $x = 0$. Av det följer att de båda leden i respektive likhet är samma för de x som anges.

Speciellt ser vi från den första likheten, genom att sätta $x = 1$, att vi lyckats beräkna summan av $\sum_{n=1}(-1)^{n+1}/n$ till $\ln 2$.

3 Taylorpolynom och approximation. Stewart 11.10

Vi vet sen tidigare att det polynom $p(x)$ av grad 1 som ”bäst” approximerar funktionen $f(x)$ i punkten a ges av $p(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$. Grafen till $p(x)$ är tangenten till grafen av $f(x)$ i punkten $(a, f(a))$.

Idén är nu att försöka approximera en funktion $f(x)$ ännu bättre med ett polynom $p_n(x)$, av grad n, i närheten av en punkt $x = a$. Vi ska försöka göra detta genom att låta $p_n(x)$ ha samma derivator upp till och med ordning n som $f(x)$ i $x = a$. Detta polynom kallas Taylorpolynomet av grad n till $f(x)$ i punkten a. Senare ska vi reda ut vilket fel som uppstår när $f(x)$ ersätts med $p_n(x)$.

Eftersom derivatorna ska stämma upp till och med ordning n ser vi genast att

$$p_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Deriverar vi nämligen detta polynom $k \leq n$ gånger kommer alla termer av grad $< k$ att försvinna, medan termer av grad $> k$ fortsatt kommer att ha minst en faktor $(x-a)$. Sätter vi sedan $x = a$ ser vi att derivatan av $p_n(x)$ i a av ordning k helt bestäms av termen $f^{(k)}(a)(x-a)^k/k!$, som efter k deriveringar bara blir $f^{(k)}(a)$. Det betyder att $p_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$, för alla k såna att $0 \leq k \leq n$.

Definition 3.1 *Om $f(x)$ är n gånger deriverbar i a kallas polynomet*

$$p_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

för f:s Taylorpolynom *av ordning n i (kring) punkten a. När $a = 0$ talar man i stället om funktionens* Maclaurinpolynom.

Exempel 3.1 *Bestäm Taylorpolynomet $p_3(x)$ av ordning 3 till $f(x) = \tan x$ kring $a = \pi/4$.*

Beräkningar ger

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$	$f^{(n)}(0)/n!$
0	$\tan x$	1	1
1	$1 + \tan^2 x$	2	2
2	$2\tan x(1 + \tan^2 x)$	4	2
3	$2(1 + \tan^2 x) + 6\tan^2 x(1 + \tan^2 x)$	16	8/3

Av detta följer att $p_3(x) = 1 + 2(x - \pi/4) + 2(x - \pi/4)^2 + 11(x - \pi/4)^3/3$.

Antag nu att $f(x) = \sum a_n(x-a)^n$ är en potensserie kring a. Upprepad anvädning av termvis derivering ger, liksom ovan, att derivatan av ordning k till $f(x)$ i a bestäms av termen $a_k(x-a)^k$, och blir $f^{(k)}(a) = k! \cdot a_k$. Det betyder att $f^{(k)}(a)/k! = a_k$, för alla k. **I klartext innebär det att vi får Taylorpolynomet av ordning n till $f(x)$ i a genom att i serien bara ta med termer av grad $\leq n$.**

Exempel 3.2 *Bestäm Maclaurinpolynomet $p_5(x)$ av ordning 5 till* $\arctan x$.

Från tidigare avsnitt har vi att $\arctan x = \sum_{n=0}(-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)$. Detta ger direkt att $p_5(x) = x - x^3/3 + x^5/5$. Maclaurinpolynomet av ordning 6 är här samma som det av ordning 5 eftersom term av ordning 6 saknas i serien.

Exempel 3.3 *Bestäm Maclaurinpolynomet av ordning 7 till* $\cos x \arctan x$.

Vi känner till omskrivningar av $\cos x$ och $\arctan x$. Genom att ta produkt av dessa har vi (via multiplikation som vid polynom)

$$\begin{aligned}
\cos x \arctan x &= (1 - x^2/2 + x^4/24 - x^6/720 + \cdots)(x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + \cdots) = \\
&= x - (1/2 + 1/3)x^3 + (1/5 + 1/6 + 1/24)x^5 - (1/7 + 1/10 + 1/72 + 1/720)x^7 + \cdots = \\
&= x - 5x^3/6 + 49x^5/120 - 1301x^7/5040 + \cdots.
\end{aligned}$$

Vilket ger att $p_7(x) = x - 5x^3/6 + 49x^5/120 - 1301x^7/5040$.

Exempel 3.4 *Bestäm Maclaurinpolynomet av ordning 5 till* $\sin^2 x$.

Vi kan göra som i tidigare exemplet och multiplicera två omskrivningar av $\sin x$ som potenserie, men också använda att $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$. Vi vet att $\cos t = 1 - t^2/2 + t^4/24 - t^6/720 + \cdots$. Substitution med $t = 2x$ ger nu

$$\sin^2 x = (1/2)(1 - 1 + 2x^2 - 2x^4/3 + 4x^6/45 - \cdots)$$

vilket ger att $p_5(x) = x^2 - x^4/3$.

Våra omskrivningar av vissa funktioner som potensserier med variabeln x kan också utnyttjas för att bestämma Taylorpolynom kring andra punkter än 0 (som ger Maclaurinpolynom).

Exempel 3.5 *Bestäm Taylorpolynomet av ordning 4 kring $a = 2$ till $f(x) = 1/(1 + x)$.*

Vi vet att $1/(1+x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots$, men vill ha en potensserier där potenserna är av $(x - 2)$ och försöker få till det med en omskrivning. Vi har

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{3 + (x-2)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x-2}{3}}.$$

Vi substituerar $t = (x-2)/3$ i omskrivningen $1/(1+t) = 1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - \cdots$ och får

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{3}\Big(1 - \frac{(x-2)}{3} + \frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(x-2)^3}{27} + \frac{(x-2)^4}{81} - \cdots\Big)$$

Detta ger $p_4(x) = 1/3 - (x-2)/9 + (x-2)^2/27 - (x-2)^3/81 + (x-2)^4/243$ är det sökta Taylorpolynomet.

Exempel 3.6 *Bestäm Taylorpolynomet av ordning* 4 *till* $f(x) = \cos x$ *kring* $a = \pi/4$.

Det är ingen större stvårighet att direkt använda definitionen av Taylorploynomet här. Beräkningar ger ($1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$)

n	$f^{(n)}$	$f^{(n)}(\pi/4)$	$f^{(n)}(\pi/4)/n!$
0	$\cos x$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
1	$-\sin x$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$
2	$-\cos x$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/4$
3	$\sin x$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/12$
4	$\cos x$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/48$

Detta ger

$$p_4(x) = \sqrt{2}/2 - \sqrt{2}(x-\pi/4)/2 - \sqrt{2}(x-\pi/4)^2/4 + \sqrt{2}(x-\pi/4)^3/12 + \sqrt{2}(x-\pi/4)^4/48.$$

Vi kan också använda de kända omskrivningarna av $\cos t$ och $\sin t$ tillsammans med additonsformeln för cosinus. Strategin är att skriva om $\cos x$ så att vi får variablen $(x - \pi/4)$ istället för x.

$$\begin{aligned}
\cos x &= \cos((x-\pi/4)+\pi/4) = \cos(x-\pi/4)\cos\pi/4 - \sin(x-\pi/4)\sin\pi/4 = \\
&= (\sqrt{2}/2)\Big(1 - (x-\pi/4)^2/2 + (x-\pi/4)^4/24 - \cdots\Big) - \\
&- (\sqrt{2}/2)\Big((x-\pi/4) - (x-\pi/4)^3/6 + (x-\pi/4)^5/120 - \cdots\Big) = \\
&= (\sqrt{2}/2) - \sqrt{2}(x-\pi/4)/2 - \sqrt{2}(x-\pi/4)^2/4 + \sqrt{2}(x-\pi/4)^3/12 + \sqrt{2}(x-\pi/4)^4/48 - \cdots
\end{aligned}$$

Problemet som kvarstår är att förstå skillnaden mellan $f(x)$ och $p_n(x)$; hur väl approximerar polynomet funktionen?

Sats 3.1 (Taylors sats) *Antag att* $f(x)$ *har kontinuerlig derivata av ordning* $n+1$ *i en omgivning till* a *. När* x *ligger i denna omgivning gäller då att*

$$f(x) = p_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

för något tal θ *mellan* x *och* a.

Bevis. För att slippa en oväsentlig men komplicerande detalj i beviset ska vi bara genomföra det underförutsättning att $x > a$. Beviset bygger på upprepad partiell integration. Låt x vara fixt.

$$\begin{aligned}
f(x) - f(a) &= \int_a^x f'(t)\,dt = \\
&= [-(x-t)f'(t)]_a^x + \int_a^x (x-t)f''(t)\,dt = \\
&= (x-a)f'(a) + [(-(x-t)^2/2)f''(t)]_a^x + \int_a^x ((x-t)^2/2)f^{(3)}(t)\,dt = \\
&= (x-a)f'(a) + ((x-a)^2/2)f''(a) + [(-(x-t)^3/3!)f^{(3)}(t)]_a^x + \int_a^x ((x-t)^3/3!)f^{(4)}(t)\,dt
\end{aligned}$$

Upprepning ger nu

$$f(x) = p_n(x) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Enligt förutsättningen är $f^{(n+1)}$ kontinuerlig mellan a och x och antar därför ett största värde M och ett minsta värde m i intervallet mellan a och x, så att $m \le f^{(n+1)}(t) \le M$.

Om vi multiplicerar med $(x-t)^n/n!$, som är ≥ 0 när t ligger mellan a och x, får vi att

$$m\frac{(x-t)^n}{n!} \le \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \le M\frac{(x-t)^n}{n!}.$$

Integration från a till x ger nu

$$m\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \le \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt \le M\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Division med $I = (x-a)^{n+1}/(n+1)!$, som är positivt, ger nu

$$m \leq \frac{1}{I}\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt \leq M.$$

Enligt satsen om mellanliggande värden finns nu ett θ mellan a och x, så att mellanledet är $f^{(n+1)}(\theta)$ och vi får

$$\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt = I f^{(n+1)}(\theta) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

■

Sats 3.2 (Taylor's Inequality. Stewart 11.10) *Antag att förutsättningarna i Taylors sats är uppfyllda. Om då, för nån konstant M,*

$$|f^{(n+1)}(t)| \leq M,$$

för alla t mellan x och a, så är

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}.$$

Bevis. Från Taylors sats har vi $|f(x) - p_n(x)| = |f^{(n+1)}(\theta)(x-a)^{n+1}/(n+1)!|$, för något tal θ mellan x och a. Enligt förutsättning gäller därför $|f^{(n+1)}(\theta)| < M$, vilket nu ger olikheten i satsen. ■

Exempel 3.7 *Bestäm ett närmevärde till* $\sin 1$, *med ett fel som är mindre än* $0.5 \cdot 10^{-4}$.

Med $f(x) = \sin x$, $x = 1$ och $a = 0$ har vi från Taylors sats att $\sin 1 - p_n(1) = f^n(\theta)(1-0)^{n+1}/(n+1)!$, där θ är nåt tal mellan $a = 0$ och $x = 1$. Vi vill att $|\sin 1 - p_n(1)| = |f^{(n)}(\theta)/(n+1)!| \leq 1/(n+1)!$, eftersom $f^{(n)}(x)$ är antingen $\pm\cos x$, eller $\pm\sin x$. Det betyder att talet M i Taylors olikehet kan väljas till $M = 1$. Vi väljer nu därför n så att $(n+1)! > 10^5/5 = 20000$. Eftersom $5! = 120$, $6! = 720$, $7! = 5040$ och $8! = 40320$ väljer vi $n = 7$. Från omskrivningen av $\sin x$ som potensserier kring $a = 0$ har vi $p_7(x) = x - x^3/6 + x^5/120 - x^7/5040$ vilket ger att

$$p_7(1) \quad = \quad 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} - \frac{1}{5040} = \frac{5040 - 840 + 42 - 1}{5040} = \frac{4281}{5040}.$$

är ett önskat närmevärde (vars fel i själva verket är $< 1/8! = 1/40320 < 1/40000 = 2.5/10000 = 0.25 \cdot 10^{-5}$).

4 Utveckling av en funktion som potensserie. Stewart 11.9 – 10

I ett tidigare avsnitt identifierade vi vissa potensserier med ”vanlig” funktioner. Potensserier är funktioner som har flera bra egenskaper: de är obegränsat deriverbara i det inre av konvergensintervallet, kontinuerliga på konvergensintervallet och närmevärden till funktionsvärden kan beräknas med de fyra vanliga räknesätten. Ett sätt att tänka på potensserier är att de är polynom av oändlig grad. På så vis har vi fått ett nytt stort tillskott till vårt förråd av funktioner och kan t.ex. använda dem vid integration och lösning av differentialekvationer.

Vi ska nu vända på situationen och utgå från en ”vanlig” funktion och försöka skriva om den som en potensserie kring nån punkt a. Detta kallas att utveckla funktionen som potensserie kring a, eller att bestämma funktionens Taylorserier i a.

I förra avsnittet såg vi att om $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$, så gäller att $f^{(n)}(a)/n! = a_n$. Vi gör därför följande

Definition 4.1 *Om $f(x)$ är obegränsat deriveribar i a kallas potensserien*

$$p(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

för f:s Taylorserie *av ordning n i (kring) punkten a. När $a = 0$ talar man i stället om funktionens* Maclaurinserie.

Definitionen påminner om den av funktionens Taylor-/Maclaurinpolynom. Skillanden är att vi nu löper linan ut och tar med termer av varje tänkbar grad, så att vi får en potensserie.

Vi har tidigare sett Maclaurinserier för t.ex. $1/(1+x)$, $\arctan x$, $\ln(1+x)$, e^x, $\cos x$ och $\sin x$. Då var utgångspunkten att vi utgick från en potensserie och försökte skriva den med hjälp av "vanliga" funktioner. Med hjälp av dessa hittade vi också vissa omskrivninga av "vanliga" funktioner som Taylorserier (runt andra punkter än 0).

Om $p(x)$ är Taylorserien till $f(x)$ är **förhoppningen** att $f(x) = p(x)$, för alla x i konvergensintervallet till $p(x)$. Så är emellertid inte alltid fallet.

Följande problem kan uppstå

1. Taylorserien $p(x)$ konvergerar bara när $x = a$, (så att konvegensradien är 0.) Då saknar förstås $p(x)$ intresse.
2. Taylorserien $p(x)$ och $f(x)$ har olika värden när $x \neq a$, även om $p:s$ konvergensradie är oändlig. Inte heller då är $p(x)$ särskilt intressant.

Ofta försöker man använda kända Maclaurinserier för att hitta Taylorserier till funktioner som bildas med de "vanliga" funktionerna. Vi har redan tidigare sett exempel på det när vi hittade Taylor/Maclaurinpolynom till vissa funktioner.

Exempel 4.1 *Bestäm Taylorserien till* $f(x) = 1/(x-2)^2$ *kring* $a = 3$.

Vi ser att $f(x) = D(-1/(x-2)) = -D(1/(1+(x-3)))$. Vi har $1/(1+t) = \sum_{n=0}(-1)^n t^n$, giltigt när $|t| < 1$, som ger $1/(x-2) = \sum_{n=0}(-1)^n(x-3)^n$. Termvis derivering ger $f(x) = -\sum_{n=1}(-1)^n n(x-3)^{n-1}$, som är giltigt när $|x-3| < 1$.

Ett sätt att försöka visa att $p(x)$ och $f(x)$ är samma funktion för x i p :s konvergensintervall är att visa att båda är lösningar till samma differentialekvation med begynnelsevärden. Det var så vi hittade Maclaurinserierna för $\arctan x$, $\ln(1+x)$, e^x, $\cos x$ och $\sin x$.

Här är ytterligare ett exempel på den tekniken.

Exempel 4.2 *Bestäm Taylorserien* $p(x)$ *till* $f(x) = x-(x-1)\ln(x-1)$ *runt* $a = 2$. *Bestäm Taylorseriens konvergensintervall och avgör för vilka* x *som* $p(x) = f(x)$.

Vi bestämmer först koefficienterna i $p(x)$ genom successiv derivering av $f(x)$ och bestämning av derivatornas värde i $a = 2$.

n	$f^n(x)$	$f^n(2)$	$f^n(2)/n!$
0	$x-(x-1)\ln(x-1)$	2	2
1	$1-\ln(x-1)-1$	0	0
2	$-(x-1)^{-1}$	-1	$(-1)^{2-1}/2!$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$(-1)^{n-1}(n-2)!(x-1)^{-(n-1)}$	$(-1)^{n-1}(n-2)!$	$(-1)^{n-1}/((n-1)n)$

Vi har därför

$$p(x) = 2 + \sum_{n=2} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)n}(x-2)^n.$$

Kvotkriteriet ger att serien konvergerar när $|x-2| < 1$, och divergerar när $|x-2| > 1$. När $x = 1$ och $x = 3$ har vi absolutkonvergens enligt enligt jämförelsekriteriet på gärnsvärdes fom genom att jämföra med den konvergenta serien $\sum 1/n^2$. Det ger konvergensintervallet $[1, 3]$. Man kan notera att $f(x)$ inte är definierad i 1, men eftersom $f(x) \to 0$ när $x \to 1^+$, är f kontinuerlig när $x \geq 1$, om vi sätter $f(1) = 1$.

Vi ska nu visa att $f(x) = p(x)$ när $x \in [1, 3]$. Vi gör det genom att visa att $p(x)$ löser en diffekvation som också har f som lösning. Termvis derivering ger

$$\begin{aligned} p'(x) &= \sum_{n=2} \frac{(-1)^{n-1}}{n-1}(x-2)^{n-1} \qquad \text{och } p'(2) = 0 \\ p''(x) &= \sum_{n=2}(-1)^{n-1}(x-2)^{n-2} = -\sum_{n=0}(-(x-2))^n = \frac{1}{1+(x-2)} = \frac{1}{x-1}, \end{aligned}$$

där vi använt att andraderivatan blev en känd potensserie. Det betyder att $p(x)$ löser ekvationen $y'' = 1/(x-1)$, $y(2) = 2, y'(2) = 0$. Vi löser den i steg genom successiv integrering och får (när $x > 1$) $y' = -\ln(x-1)$. Partiell ingegration ger $y = -(x-1)\ln(x-1) + \int 1\,dx = f(x)$. Alltså är $p(x) = f(x)$ när $x \in (1,3]$ och sätter vi $f(1) = 1$, gäller likheten när $x \in [1,3]$.

4.1 Exempel på användning av potensserier

Vi ska ge två olika exempel på hur potensserier kan användas. Vi ska

1. beräkna en series summa genom att känna igen den som värde av en potensserie,
2. beräkna gränsvärden på ett vetenskapligt vis, dvs metodiskt,

4.1.1 En series summa

Idén är här att man ska känna igen en serie som ett värde av en potensserie som man sedan uttrycker med hjälp av elementära funktioner. Det sista steget kan fullbordas som i avsnitt 2.3, men det gäller att välja sin potensserie med omsorg för att klara det.

Exempel 4.3 *Avgör om serien* $\sum_{k=0}^{\infty}(4k+1)^{-1}2^{-k}$ *konvergerar eller divergerar. Beräkna dess summa.*

Man ser lätt med jämförelsekriteriet och den geometriska summan $\sum_{k=0}^{\infty}(1/2)^k$ att serien konvergerar. Vi söker summan.

Om vi sätter $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(4k+1)^{-1}x^k$, så är den aktuella serien $P(1/2)$, men vi får problem att känna igen $P(x)$; den varken deriverar eller integrerar till något bekant.

Vi sätter därför istället $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(4k+1)^{-1}x^{4k+1}$, men nu är den aktuella serien i stället $2^{1/4}P(2^{-1/4})$. Vi försöker bestämma $P(x)$ med elementära funktioner och ser att $P(0) = 0$ och att $P'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{4k} = 1/(1-x^4)$, när $|x| < 1$.

Integration ger därför

$$\begin{aligned} P(x) &= \int \frac{1}{1-x^4}\,dx = \int \frac{1}{(1-x)(1+x)(1+x^2)}\,dx = \frac{1}{4}\int \Big(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} + \frac{2}{1+x^2}\Big)\,dx = \\ &= \frac{1}{4}\Big(\ln\Big(\frac{1+x}{1-x}\Big) + 2\arctan x\Big) + C \end{aligned}$$

Från $P(0) = 0$ ser vi att $C = 0$, så

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(4k+1)2^k} = 2^{1/4}P(2^{-1/4}) = \frac{1}{4}\Big(\ln\Big(\frac{1+2^{-1/4}}{1-2^{-1/4}}\Big) + 2\arctan 2^{-1/4}\Big)$$

4.1.2 Gränsvärdesberäkningar

Idén här är att skriva om uttryck som ger obestämda uttryck när $x \to a$ som (kvot av) potensserier kring $x = a$. Här gäller det att känna till potensserieutvecklingar av de vanliga elementära funktionerna och komma ihåg att när $x \to a$, dominerar en låg potens av $x - a$ över en högre. Om

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{a_n(x-a)^n + a_{n+1}(x-a)^{n+1} + \cdots}{b_m(x-a)^m + b_{m+1}(x-a)^{m+1} + \cdots} = \\ &= \frac{(x-a)^n}{(x-a)^m}\cdot\frac{a_n + a_{n+1}(x-a)^1 + \cdots}{b_m + b_{m+1}(x-a)^1 + \cdots} \end{aligned}$$

där $a_n \neq 0$ och $b_m \neq 0$, gäller att gränsvärdet är

1. $\pm\infty$, när $x \to a^{\pm}$, om $m > n$,
2. a_n/b_m, när $x \to a$, om $n = m$
3. 0, när $x \to a$, om $m < n$.

Exempel 4.4 *Beräkna gränsvärdet av*

$$\frac{\arctan(x^2) - x^2}{\cos(x^3) - 1},$$

när $x \to 0$.

Vi ser att gränsvärdet är av typen $0/0$.

Vi har de kända utvecklingarna $\arctan t = t - t^3/3 + t^5/5 + \cdots$, och $\cos t = 1 - t^2/2! + t^4/4! +$ som ger oss

$$\begin{aligned}\frac{\arctan(x^2) - x^2}{\cos(x^3) - 1} &= \frac{(x^2 - x^6/3 + x^{10}/5 + \cdots) - x^2}{(1 - x^6/2! + x^{12}/4! + \cdots) - 1} = \frac{x^6/3 + x^{10}/5 + \cdots}{x^6/2! + x^{12}/4! + \cdots} = \\ &= \frac{-1/3 + x^4/5 + \cdots}{-1/2 + x^6/4! + \cdots} \to \frac{-1/3}{-1/2} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

när $x \to 0$. (Vid den näst sista likheten förkortade vi med x^6.)

Exempel 4.5 *Undersök gränsvärdet av uttrycket*

$$\frac{\cos(x)e^{x^2/2} - 1}{x^2 \arctan x^2},$$

när $x \to 0$. *Bestäm det om det existerar.*

Gränsvärdet är av typen ”0/0”. Vi utvecklar täljare och nämnare som potensserier.

Kända Maclaurinutvecklingar ger:

$$\begin{aligned}\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \text{termer av högre grad} \\ e^t &= 1 + t + \frac{t^2}{2} + \text{termer av högre grad} \\ e^{x^2/2} &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \text{termer av högre grad.}\end{aligned}$$

Detta ger att täljaren är

$$\begin{aligned}\Big(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \text{termer av högre grad}\Big)\Big(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \text{termer av högre grad}\Big) - 1 = \\ = 0 + \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Big)x^2 + \Big(\frac{1}{24} + \frac{1}{8} - \frac{1}{4}\Big)x^4 + \text{termer av högre grad} = \\ = -\frac{x^4}{12} + \text{termer av högre grad.}\end{aligned}$$

Vi har också

$$\begin{aligned}\arctan t &= t - \frac{t^3}{3} + \text{termer av högre grad} \\ x^2 \arctan x^2 &= x^4 + \text{termer av högre grad.}\end{aligned}$$

Tillsammans med a) ger detta att

$$\frac{\cos(x)e^{x^2/2} - 1}{x^2 \arctan x^2} = \frac{-x^4/12 + \text{termer av högre grad}}{x^4 + \text{termer av högre grad}} = \frac{-1/12 + \text{termer med } x}{1 + \text{termer med } x} \to -\frac{1}{12},$$

när $x \to 0$.

Svar: $-1/12$.