Kompletteringar till MVE017

J A S, HT 2018

1 Integralkalkylens huvudsats

I kursboken (J Stewart, Calculus: Early Transcendentals, International metric edition, 8:e upplagan) bevisas den sats som kallas integralkalylens huvudsats oberoende av en sats som kallas integralkalylens medelvärdessats. I boken visas sedan denna medlevärdessats (The Mean Value Theorem for Integrals, sid 462) med hjälp av integralkalylens huvudsats. Det är lite originellt och i själva verket innehåller bokens bevis av integralkalylens huvudsats också (nästan) ett bevis av (den enklaste varianten av) medelvärdessatsen. Det gör beviset av huvudsatsen en aning tungt, så jag kommer att först visa integralkalkylens medelvärdessats.

Man kan uppfatta talet $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ som en form av medelvärde av funktionen f över intervallet $[a,\, b]$, eftersom rektangeln med intervallet som bas och höjd μ har area (räknad med tecken) som är $\mu(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$. Integralkalkylens medelvärdessats, i sin mest avskalade form, säger att detta medelvärde också är funktionens värde $f(c)$ i nåt tal $c \in [a,\, b]$.

Sats 1.1 (Integralkalylens medelvärdessats) ★ *Antag att funktionerna f och g är kontinuerliga på intervallet $[a,\, b]$ och att g inte växlar tecken på intervallet. Då finns ett tal $c \in [a,\, b]$, så att*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Anm

1. Att $g(x)$ inte växlar tecken på $[a,\, b]$ betyder här att $g(x) \geq 0$, eller att $g(x) \leq 0$, för alla x i intervallet.
2. Om vi i satsen väljer g som funktionen som är konstant 1 på intervallet får vi
$$\int_a^b f(x)\cdot 1\,dx = f(c)\int_a^b 1\,dx = f(c)(b-a), \text{ eller } f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$
3. Vi ska strax använda 1.1 när g är konstant 1, men satsen har flera andra tillämpningar där det är viktigt att ha den allmännare varianten.

Bevis Beviset genomförs bara under förutsättning att $g(x) \geq 0$, för alla x i intervallet. Beviset när $g(x) \leq 0$, går till på liknande vis, men man får kasta om olikheterna (1) och (2) nedan och ersätta $\int_a^b g(x)\,dx > 0$, med $\int_a^b g(x)\,dx < 0$. (Det räcker att bevisa satsen under förutsättning att $g(x) \geq 0$ vid tentamen.)

Enligt max/min-satsen (Extremal Value Theorem) har den kontinuerliga funktionen f ett minsta värde m och ett största värde M på intervallet $[a,\, b]$, så att

$$m \leq f(x) \leq M,$$

för alla $x \in [a,\, b]$. Eftersom $g(x) \geq 0$ gäller därmed att

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x), \tag{1}$$

för alla x i intervallet. Integration ger därför

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq M\int_a^b g(x)\,dx. \tag{2}$$

Om $\int_a^b g(x)\,dx = 0$ fungerar vilket tal $c \in [a,\,b]$ i satsen, för då ger (2) att $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$. Annars är $I = \int_a^b g(x)\,dx > 0$ och division med detta tal ger

$$m \leq \frac{1}{I}\cdot\int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq M.$$

Enligt statsen om mellanliggande värde (Intermediate Value Theorem) antar f, som ju är kontinuerlig på $[a,\,b]$, varje värde mellan m och M, så det finns ett tal $c \in [a,\,b]$, så att

$$f(c) = \frac{1}{I}\cdot\int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq M, \text{ eller } f(c)\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

■

Definitionen av den bestämda intergralen av en funktion över ett intervall $[a,\,b]$ är ju ganska komplicerad och involverar en typ av gränsvärde av olika Riemannsummor. Att beräkna integraler utgående från definitionen går i allmänhet inte. Vi ska nu skaffa oss en, kanske lite oväntad, metod att beräkna dem på ett helt annat sätt. Grunden för detta utgörs av integralkalkylens huvudsats som består av två delar. Först visar man att en viss funktion, som definieras med hjälp av en integral, är deriverbar och att derivatan är den funktion f, som man integrerar. Därefter visas att det går att beräkna integralen med hjälp av vilken funktion som helst som har f som derivata. En sån funktion kallas en *primitiv funktion* till f.

Sats 1.2 (Integralkalylens huvudsats del 1) *Antag att f är kontinuerlig på intervallet $[a,b]$ och sätt*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad a \leq x \leq b.$$

Då gäller

- *F är kontinuerlig på $[a,b]$,*
- ★ *F är deriverbar på (a,b) och $F'(x) = f(x)$ när $x \in (a,b)$.*

Anm

1. I $F(x)$ är det den övrer gränsen i integralen som varierar: för varje $x \in [a,\,b]$ integrerar vi f över intervallet $[a,\,x]$. Därför är variabeln i f inuti intergralen utbytt mot t.
2. $F(x)$ existera eftersom f är kontinuerlig på $[a,x]$.
3. $F(a) = 0$ och $F(b) = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx$.

Bevis Tag ett $x \in (a,b)$. Differenskvoten för F i x är då

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{h}(F(x+h) - F(x)) = \frac{1}{h}\Big(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\Big) = \\ &= \frac{1}{h}\Big(\int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\Big) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt. \end{aligned}$$

Vi har att $F'(x) = \lim_{h\to 0} Q$, om gränsvärdet existerar.

Enligt integralkalkylens medelvärdessats (sats 1.1) finns för varje h ett c_h mellan x och $x+h$, så att

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(c_h). \tag{3}$$

När $h \to 0$, gäller att $c_h \to x$ och eftersom f är kontinuerlig gäller då att $f(c_h) \to f(x)$. Det betyder att gränsvärdet av differenskvoten Q finns när $h \to 0$ och att det är $f(x)$. Enligt definition är detta gränsvärde även $F'(x)$, så att $F'(x) = f(x)$ för alla $x \in (a,\, b)$.

Om $x = a$ så gäller (3) när $h > 0$, så när $h \to 0^+$ gäller att $Q = \frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(t)\,dt \to f(a)$. Av detta följer att $F(a+h) = hQ \to 0 \cdot f(a) = 0 = F(a)$, när $h \to 0^+$. Detta visar att F är (höger)kontinuerlig i a.

Om $x = b$ så gäller (3) när $h < 0$, så när $h \to 0^-$ gäller att $Q = -\frac{1}{h}\int_{b+h}^{b} f(t)\,dt \to f(b)$. Av detta följer att $F(b+h) = F(b) + hQ \to 0 \cdot f(b) + F(b) = F(b)$, när $h \to 0^-$. Detta visar att F är (vänster)kontinuerlig i b. ■

Definition 1.1 (Primitiv funktion) *Om f är definierad på ett intervall, så är F en* primitiv funktion *till f där, om F är kontinuerlig på intervallet och deriverbar i det inre av intervallet med $F'(x) = f(x)$ där.*

Med det inre av ett intervall avses alla punkter i intervallet, utom eventuellt ingående ändpunkter. T.ex. är det inre av $[8,\, 9)$ intervallet $(8,\, 9)$, medan det inre av $(-\infty,\, 5]$ är $(-\infty, 5)$.

Enligt sats 1.2 har en kontinuerlig funktion på $[a, b]$ alltid (minst) en primitv funktion; funktionen $F(x)$ som definieras i satsen är en primitiv funktion till $f(x)$.

Sats 1.3 *Anatag att F och G är primitiva funktioner till f på $[a, b]$. Då finns en konstant C så att $F(x) = G(x) + C$ för alla $x \in [a, b]$.*

Bevis. Förutsättningarna ger att $F(x) - G(x)$ är kontinuerlig på $[a, b]$ och att $(F(x) - G(x))' = f(x) - f(x) = 0$, för alla $x \in (a, b)$. En konsekvens av medelvärdessatsen ger nu att $F(x) - G(x)$ är en konstant (låt oss kalla den C) på $[a, b]$, dvs att $F(x) = G(x) + C$ där. ■

Sats 1.4 (Integralkalkylens huvudsats del 2) ★ *Om f är kontinuerlig på $[a, b]$ och F är en primitiv funktion till f där, så gäller*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Bevis Vi sätter $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ (vi kallar den G här efter som F betyder nåt annat i sastens formulering) och vet då enligt integralkalkylens huvudsats del 1 (sats 1.2) att G är en primitiv funktion till f på $[a, b]$. Därför finns (enligt sats 1.3) en konstant C så att $F(x) = G(x) + C$ för alla $x \in [a, b]$.

Vi har $\int_a^b f(t)\,dt = G(b) = G(b) - G(a)$ (för $G(a) = 0$.) Därför gäller att

$$\int_a^b f(t)\,dt \quad = \quad G(b) = G(b) - G(a) = G(b) + C - (G(a) + C) = F(b) - F(a).$$

■

Integralkalkylens huvudsats del 2 (sats 1.4) innebär alltså att så fort vi hittar en funktion F sån att $F'(x) = f(x)$ på intervallet, så kan vi beräkna $\int_a^b f(x)\,dx$ på ett helt annat sätt än som gränsvärde av Riemann-summor. Integralens värde är helt enkelt $F(b) - F(a)$. Ganska fantastiskt egentligen!

Det betyder att det är viktigt att kunna hitta en primitiv funktion till en given funktion f. Man inför därför beteckningen $\int f(x)\,dx$ för en primitiv funktion till f, även om detta från början inte har nåt samband alls med den bestämda integralen $\int_a^b f(x)\,dx$, som ju definieras som en typ av gränsvärde av Riemann-summor till f. Det är sats 1.4 som motiverar beteckningen $\int f(x)\,dx$, som också kallas den *obestämda integralen* av f.

I en del litteratur betecknar $\int f(x)\,dx$ *samtliga* primitiva funktioner till f. Om f:s defintionsmängd är ett intervall, så skiljer sig två primitiva funktioner åt bara med en konstant: om $G' = f = F'$ så är $G(x) = F(x) + C$, för nån konstant C.

Om däremot definitionsmängden till f består av flera olika intervall, så kan man välja konstanten olika på dessa olika intervall. Det betyder att om F är en primitiv funktion till f, så ges alla av $F(x) + C(x)$, där $C(x)$ är en godtycklig funktion som är konstant på varje intervall i definitionsmängden.

Det blir lite tungt att släpa på detta, så jag använder oftast $\int f(x)\,dx$ som beteckning för én primitiv funktion till f och skriver t.ex. $\int 1/x\,dx = \ln(|x|)$ i stället för $\int 1/x\,dx = \ln(|x|) + C(x)$, där $C(x)$ är en godtycklig funktion som är konstant på $(-\infty, 0)$ och på $(0, \infty)$ (men kan ha olika värden på de två intervallen).

Det finns situationer där det blir viktigt att låta $\int f(x)\,dx$ faktiskt stå för samtliga primitiva funktioner till f (t.ex. när man, som vi ska göra senare, löser differentialekvationer), men jag föredrar att då påpeka det särskilt då.

2 Integration av rationella funktioner

Låt oss säga att vi har en (obestämd) integral $\int f(x)\,dx$, där *integranden,* dvs den funktion f som ska integreras, ser komplicerad ut i detta avseende. Vi ser ingen väg att klara det med vanliga knep som omskrivning och partiell integration.

Man kan då hoppas på att det finns ett variabelbyte $x = g(t)$ så att

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{p(t)}{q(t)}\,dt,$$

där $p(t)$ och $q(t)$ är polynom, så att $p(t)/q(t)$ är en *rationell* funktion.

I princip skulle det lösa problemet, för det visar sig att det finns en systematisk metod att integrera rationella funktioner. En väsentlig ingridiens i denna är det som kallas *partialbråksuppdelning* (förkortat PBU) av rationella funktioner, som också är användbart i andra sammanhang.

2.1 Partialbråksuppdelning

Ofta vill vi skriva en summa av bråk som ett enda, t.ex. när vi vill avgöra tecknet på en sån summa för olika värden på variabeln. Exempelvis har vi att

$$\frac{1}{x+1} + \frac{2}{1-3x} = \frac{3-x}{(x+1)(1-3x)},$$

där ett enkelt teckenstudium ger tecknet på högra ledet på olika intervall på tallinjen.

Antag nu att vi i stället vill hitta en primitiv funktion till högra ledet. Då är det lätt att integrera det som står i vänstra ledet, men svårare att (direkt) integrera högra ledet. De olika sätten att skriva samma funktion lämpar sig alltså olika bra beroende på vilket syfte vi har.

Partialbråksuppdelning går ut på att att skriva ett bråk (som i högra ledet ovan) som en summa av andra ("enklare") bråk (som i vänstra ledet). PBU är alltså det omvända mot att skriva på gemensamt bråkstreck.

Till grund för PBU liggen en sats av principiell natur som kallas *algebrans fundamentalsats.* För att formulera den behöver vi först en definition.

Definition 2.1 (Irreducibelt polynom) *Ett polynom av grad* ≥ 1 *är* irreducibelt *om det inte kan skrivas som en produkt av två polynom, som båda är av grad* ≥ 1.

Exempelvis är varje polynom av grad 1 irreducibelt. Polynom av grad två som saknar reella nollställen är också irreducibla, eftersom faktorsatsen ger att en faktor av grad 1 motsvarar ett nollställe. Algebrans fundamentalsats säger att detta är de enda irreducibla polynomen och att varje polynom av grad > 0 är en produkt av såna. (Jämför med uppdelning av heltal > 1 som produkt av primtal.) I detta sammanhang räknas ett irreducibelt polynom som en produkt med bara en faktor. Lite tokigt, men det gör det lättare att formulera satsen.

Sats 2.1 (Algebrans fundamentalsats)

1. *De irreducibla polynomen är precis de av grad 1 och de av grad 2 som saknar reella nollställen.*
2. *Varje polynom av grad > 0 kan skriva som en produkt av irreducibla polynom.*

Om vi har en rationell funktion $p(x)/q(x)$ är det enligt satsen möjligt att skriva $q(x)$ som en produkt av olika irreducibla polynom. Låt oss kalla dem $q_1(x), \ldots, q_k(x)$. Varje sånt kan förekomma flera gånger som faktor i $q(x)$, så att

$$q(x) = q_1(x)^{n_1} q_2(x)^{n_2} \cdots q_k(x)^{n_k}.$$

där n_1, n_2, …, n_k är några heltal ≥ 1.

Sats 2.2 (Existens av PBU)

1. *Antag att $q(x) = q_1(x)^{n_1} q_2(x)^{n_2} \cdots q_k(x)^{n_k}$, där q_1, $q_2, \ldots$, q_k är olika irreducibla polynom. Om graden av $p(x)$ är $<$ graden av $q(x)$, så finns polynom p_1, $p_2, \ldots$, p_k, så att*

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p_1(x)}{q_1(x)^{n_1}} + \frac{p_2(x)}{q_2(x)^{n_2}} + \cdots + \frac{p_k(x)}{q_k(x)^{n_k}},$$

   där graden av p_i är lägre en graden i nämnaren, dvs $n_i \cdot \mathrm{grad}(q_i)$, för varje $i = 1, 2, \ldots, k$.

2. *Om graden av $p(x)$ är $<$ graden av $q(x)^n$, så finns polynom a_1, a_2, a_n, alla av grad $<$ graden av q, så att*

$$\frac{p(x)}{q(x)^n} = \frac{a_1(x)}{q(x)} + \frac{a_2(x)}{q(x)^2} + \cdots + \frac{a_n(x)}{q(x)^n}.$$

Satsen ger följande **metod** för att genomföra partialbråksuppdelning av $p(x)/q(x)$, där täljarens grad är lägre än nämnarens:

1. Faktorisera nämnaren i en produkt av olika irreducibla ploynom $q = q_1^{n_1} q_2^{n_2} \cdots q_k^{n_k}$.
2. *Ansätt* för varje irreducibelt polynom q_i (som alltså är av grad 1 eller 2) polynom a_{i1}, $a_{i2}, \ldots$, a_{in_i} av *en grad lägre* än q_i och bilda

$$\frac{a_{i1}(x)}{q_i(x)} + \frac{a_{i2}(x)}{q_i(x)^2} + \cdots + \frac{a_{in_i}(x)}{q_i(x)^{n_i}}.$$

3. Summan av alla ansatserna ska sen bli $\dfrac{p(x)}{q(x)}$.

Sats 2.2 innebär att man alltid kommer att lyckas bestämma de olika polynomen som ansätts.

Detta verkar ju ganska komplicerat, men i konkreta fall är det ganska enkelt. Här är ett exempel på hur ansatsen går till.

Exampel 2.1 *Gör ansatsen för PBU av* $\dfrac{x^2 + x + 3}{(x-1)^3(x^2+2)^2}$.

Lösning Täljaren är av lägre grad än nämnaren, som redan är faktoriserad som produkt av irreducibla. Vi har två olika såna faktorer, nämligen $x-1$ och x^2+2. Den första förekommer i potensen 3, så vi ska ha tre bråk för den i ansatsen, med olika potenser av den nämnaren och en konstant i varje täljare (en grad lägre än graden av $x-1$). Den andra förekommer i potensen 2, så vi ska ha två bråk i ansatsen för den, med olika potenser av den nämnaren och ett polynom av grad 1 i varje täljare (en grad lägre än graden av x^2+2). Ansatsen blir därför

$$\frac{x^2+x+3}{(x-1)^3(x^2+2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} + \frac{Dx+E}{x^2+1} + \frac{Fx+G}{(x^2+1)^2},$$

där A, B, C, D, E, F, G är reella tal som går att bestämma så att likheten gäller enligt sats 2.2. □

Hur går man då tillväga för att bestämma alla dessa konstanter? Ett sätt är att helt sonika skriva ihop högra ledet på ett bråk. Man kommer då att få samma nämnare som i vänstra ledet och ett polynom i täljaren med obekanta koefficienter. Det polynomet ska då vara samma som täljaren i vänstra ledet. Här är ett mer modest exempel där vi genomför detta:

Exampel 2.2 *Genomför PBU av* $\dfrac{x^2+1}{(x-1)^2(x^2+2)}$.

Lösning Ansatsen blir

$$\begin{aligned}\frac{x^2+1}{(x-1)^2(x^2+2)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2} = \frac{A(x-1)(x^2+2)+B(x^2+2)+(Cx+D)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+2)} = \\ &= \frac{(A+C)x^3+(-A+B-2C+D)x^2+(2A-2D+C)x+(-2A+2B+D)}{(x-1)^2(x^2+2)}\end{aligned}$$

Vi ska ha att polynomet i täljaren i vänsta ledet är samma som det i högra ledet, så det ska vara samma koefficienter framför de olika potenserna av x. Det ger ekvationssystemet (jämför i tur och ordning koefficienter för x^3, x^2, x och konstanten)

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ -A + B - 2C + D = 1 \\ 2A + C - 2D = 0 \\ -2A + 2B + D = 1 \end{cases},$$

som har en utökad koefficient matris som vi över för till trappstegsform:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & -1 \end{array}\right).$$

Av detta följer att $D = 1/9$, $C = -2/9$, $B = 2/3$ och $A = 2/9$ så att

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^2(x^2+2)} = \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{x-1} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{9}\cdot\frac{-2x+1}{x^2+1}.$$

□

För att påminna om syftet med denna verksamhet tar vi följande

Exampel 2.3 *Bestäm en primitiv funktion till* $f(x) = \dfrac{x^2+1}{(x-1)^2(x^2+2)}$.

Lösning Enligt exempel 2.2 har vi

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \frac{2}{9}\cdot\int\frac{dx}{x-1} + \frac{2}{3}\cdot\int\frac{dx}{(x-1)^2} - \frac{1}{9}\cdot\int\frac{2x}{x^2+2}\,dx + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2}\cdot\int\frac{dx}{(x/\sqrt{2})^2+1} = \\ &= \frac{2}{9}\ln(|x-1|) - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{1}{9}\ln(x^2+2) + \frac{\sqrt{2}}{18}\arctan(x/\sqrt{2}) = \\ &= \frac{1}{9}\ln\Big(\frac{(x-1)^2}{x^2+2}\Big) - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x-1} + \frac{\sqrt{2}}{18}\arctan(x\sqrt{2}/2).\end{aligned}$$

□

2.2 Genvägar vid PBU

Som vi såg i exempel 2.2 kan PBU leda till ganska omfattande beräkningar för att bestämma alla obekanta i ansatsen i högra ledet. Det finns några genvägar man kan ta, som ibland är väldigt effektiva.

Den första kallas **handpåläggning (HP)** och går ut på att man ganska enkelt kan bestämma vad som ska stå i täljaren i bråket med den högsta potensen av en irreducibel i nämnaren. Efter multiplikation av båda sidor av likheten i ansatsen med en sån nämare kan man, utan att riskera division med noll, sätta in nollställen till det irreducibla polynomet och jämföra båda sidor.

Vi illustrerar detta med

Exampel 2.4 *Partialbråksuppdela* $f(x) = \dfrac{x^2+1}{(x-1)^2(x-2)^3}$

Lösning Ansatsen blir

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^2(x-2)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{(x-2)^2} + \frac{E}{(x-2)^3}.$$

Mutiplicera nu båda sidor med $(x-2)^3$ och förkorta och sätt sedan $x = 2$ (nollstället till $x-2$):

$$\begin{aligned}\frac{x^2+1}{(x-1)^2} &= \frac{A}{x-1}\cdot(x-2)^3 + \frac{B}{(x-1)^2}\cdot(x-2)^3 + \frac{C}{1}\cdot(x-2)^2 + \frac{D}{1}\cdot(x-2) + \frac{E}{1},\\ \frac{5}{1} &= 0+0+0+0+E,\end{aligned}$$

dvs $E = 5$. Effekten blir samma om vi koncentrerar oss om vänstra ledet och **lägger handen på** $(x-2)^3$ i nämaren och sedan sätter in nollstället till $x-2$. Det ger oss direkt $E = 5$.

På samma sätt kan vi bestämma B genom att multiplicera båda sidor med $(x-1)^2$ och sedan sätta $x = 1:$

$$\left.\frac{x^2+1}{(x-2)^3}\right|_{x=1} = B,$$

dvs $B = -2$.

Det är ju strålande! Kan vi bestämma A på samma sätt? Svaret är nej, för efter multiplikation av båda sidor i ansatsen med $x-1$ kan vi inte sätta in $x = 1$, eftersom det efter förkortning fortsatt förekommer $x-1$ i nämnare.

Det vi kommit fram till med HP är

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^2(x-2)^3} = \frac{A}{x-1} - \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{(x-2)^2} + \frac{5}{(x-2)^3},$$

så vi har tre obekanta kvar att bestämma. Vi kan förstås göra det genom att skriva högra ledet på gemensamt bråkstreck och sedan jämföra täljarna på båda sidor, men det finns också ett annat sätt att komma fram till ekvationer som A, C och D löser.

Vi kan börja med att konstatera att om vi skriver högra ledet på gemensamt bråkstreck så ska A och C multipliceras med var sin fjärdegradare medan andra konstanter multipliceras med polynom av lägre grad.

Det betyder att vi i högra ledet då får $(A+C)x^4+$ termer av lägre grad. Eftersom x^4 inte förekommer i vänstra ledets täljare ska $0 = A + C$ och $C = -A$. Det ger

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^2(x-2)^3} = \frac{A}{x-1} - \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{A}{x-2} + \frac{D}{(x-2)^2} + \frac{5}{(x-2)^3},$$

Vi kan **sätta in** två **olika värden på x i båda sidor och jämföra resultatet**. Denna metod fungerar bäst när man hittar några värden på x som ger "lätta tal" i högra ledet. Här kan vi, om vi vill, även använda komplexa tal. T.ex skulle $x = \pm i$ båda ge noll i vänstra ledet, men det blir lite komplicerat i högra ledet. Vi väljer att sätta in

$$x = 0 \quad \text{som ger} \quad -\frac{1}{8} = -A - 2 + \frac{A}{2} + \frac{D}{4} - \frac{5}{8}, \text{ eller } -4A + 2D = 20$$
$$x = 3 \quad \text{som ger} \quad \frac{10}{4} = \frac{A}{2} - \frac{1}{2} - A + D + 5, \text{ eller } -2A + 4D = -8$$

som sen ger $A = -8$ och $D = -6$, så att

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^2(x-2)^3} = -\frac{8}{x-1} - \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{8}{x-2} - \frac{6}{(x-2)^2} + \frac{5}{(x-2)^3}.$$

□

Här är ytterligare ett exempel, som är lite mindre komplicerat

Exampel 2.5 *Bestäm en primitiv funktion till* $f(x) = \dfrac{4x^2}{(x-1)^2(x-3)}$.

Lösning Ansatsen blir

$$\frac{4x^2}{(x-1)^2(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-3}.$$

HP ger $B = -2$ och $C = 9$. Vi sätter $x = 0$ och får $0 = -A - 2 - 3$, så $A = -5$.

Vi får

$$\begin{aligned} \int \frac{4x^2\,dx}{(x-1)^2(x-3)} &= -5\int \frac{dx}{x-1} - 2\int \frac{dx}{(x-1)^2} + 9\int \frac{dx}{x-3} = \\ &= \ln\left|\frac{(x-3)^9}{(x-1)^5}\right| + \frac{2}{x-1}. \end{aligned}$$

□

2.3 Integrationen

Vi har sett att man med partialbråksuppdelning kan skriva en rationell funktion $a(x)/b(x)$, där täljaren har lägre grad än nämnaren, som en summa av bråk av typen

$$\frac{p(x)}{q(x)^n},$$

där $q(x)$ är irreducibelt (och därför av grad 1 eller 2) och $p(x)$ är av en grad lägre än $q(x)$.

För att avsluta metoden för integration av rationella funktioner återstår det att integrera uttryck av formen $A/(x+a)^n$, som inte erbjuder nån svårighet allts, men också de av av formen $(Ax+B)/(x^2+ax+b)^n$, där nämnaren saknar reella nollställen. Idén här är att först justera nämnaren så att den bli derivatan av det irreducibla polynomet i nämnaren:

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax+B}{(x^2+ax+b)^n}\,dx &= \frac{A}{2}\int \frac{2x+a}{(x^2+ax+b)^n}\,dx + \int \frac{B-aA/2}{(x^2+ax+b)^n}\,dx = && (4) \\ &= \frac{A}{2}\int \frac{2x+a}{(x^2+ax+b)^n}\,dx + \int \frac{C}{(x^2+ax+b)^n}\,dx, && (5) \end{aligned}$$

där vi satt $C = B - aA/2$.

Den första av dessa intergraler klarar man nu med variabelbytet $t = x^2 + ax + b$ (eller direkt). I den andra integralen gör man kvadratkomplettering i nämnaren och sen ett variabelbyte:

$$\int \frac{C}{(x^2+ax+b)^n}\,dx = \int \frac{C}{((x+a_1)^2+b_1)^n}\,dx = \frac{1}{b_1^n}\int \frac{C}{\left(\left(\frac{x+a_1}{\sqrt{b_1}}\right)^2+1\right)^n}\,dx = \tag{6}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} t = (x+a_1)/\sqrt{b_1} \\ dt = (1/\sqrt{b_1})\,dx, \quad dx = \sqrt{b_1}\,dt = dx \end{array} \right\} = \tag{7}$$

$$= \int \frac{K}{(t^2+1)^n}\,dt \tag{8}$$

När $n = 1$ har vi

$$\int \frac{dt}{t^2+1} = \arctan t,$$

vilket löser problemet i detta fall. I denna kurs kommer vi inte att hantera integraler där integranden är $1/(t^2+1)^n$ och $n > 1$, men för fullständighets skull finns tillvägagångssättet efter nästa exempel.

Exampel 2.6 *Beräkna* $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2+4x+6}\,dx.$

Lösning Vi börjar med att justera nämnare så att vi får en intergral med derivatan till x^2+4x+6 i täljaren:

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+6}\,dx + \int \frac{dx}{(x+2)^2+2}, \tag{9}$$

där vi passat på att kvadratkomplettera i den sista intergralens nämnare.

Eftersom det i täljaren i den första integralen står derivatan av nämnaren gäller

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+6}\,dx = \frac{1}{2}\cdot \ln(x^2+4x+6).$$

(Vi behöver inget absolutbelopp i ln eftersom x^2+4x+6 alltid är positivt.)

Vi hanterar nu den andra integralen i (9):

$$\int \frac{dx}{(x+2)^2+2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{((x+2)/\sqrt{2})^2+1} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\arctan((x+2)/\sqrt{2}),$$

där vi i sista steget justerat för den inre derivatan av $(x+2)/\sqrt{2}$.

Resultatet blir

$$\int \frac{x+3}{x^2+4x+6}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\ln(x^2+4x+6) + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\arctan((x+2)/\sqrt{2}).$$

Det allmänna fallet $I_n = \int dt/(t^2+1)^n$, där $n > 1$ löses i flera steg. Vi har med partiell integration när $n \geq 1$ att

$$\begin{aligned} I_n = \int \frac{dt}{(t^2+1)^n} &= \{\text{ PI }\} = t\cdot\frac{1}{(t^2+1)^n} + 2n\int \frac{t\cdot t}{(t^2+1)^{n+1}}\,dt = \\ &= \frac{t}{(t^2+1)^n} + 2n\int \frac{t^2+1}{(t^2+1)^{n+1}}\,dt - 2n\int \frac{dt}{(t^2+1)^{n+1}} = \\ &= \frac{t}{(t^2+1)^n} + 2nI_n - 2nI_{n+1}. \end{aligned}$$

Här kan vi lösa ut I_{n+1} och får då

$$I_{n+1} = \int \frac{dt}{(t^2+1)^{n+1}} \quad = \quad \frac{1}{2n} \cdot \frac{t}{(t^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} \cdot I_n. \tag{10}$$

Exempelvis gäller när $n = 1$ att

$$I_2 = \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{1}{2} \frac{t}{(t^2+1)^2} + \frac{1}{2} \arctan t,$$

som vi sen enligt (10) kan använda för att bestämma I_3 och så vidare.

2.4 Sammanfattning

Metoden för att integrera en rationell funktion $p(x)/q(x)$ sker i följande steg

1. Utför plynomdivision $p(x)/q(x) = k(x) + r(x)/q(x)$, där r har lägre grad än q. Polynomet $k(x)$ är inget problem att integrera.

   För enkelhets skull kallar vi nu $r(x)$ för $p(x)$ (så att graden av p är lägre än graden av q).

2. Faktorisera $q(x)$ som en produkt $q = q_1^{n_1} q_2^{n_2} \cdots q_k^{n_k}$ av olika irreducibla och förkorta eventuellt gemensamma faktorer med $p(x)$.

3. Utför PBU på $p(x)/q(x)$

4. Använd

   $$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \begin{cases} -\dfrac{1}{n-1} \cdot \dfrac{1}{(x-a)^{n-1}} & \text{när} \quad n > 1 \\ \ln(|x-a|) & \text{när} \quad n = 1. \end{cases}$$

   I den här kursen kommer vi inte att integrera med högre potenser av irreducibel andragradare i nämnaren, men vi ska använda följande:

   $$\int \frac{x+c}{x^2+bx+c}\,dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+b}{x^2+bx+c}\,dx + \frac{2c-b}{2} \int \frac{dx}{(x+b/2)^2 + c - b^2/4}\,dx$$

   Den första av integralerna i högra ledet löses genom

   $$\int \frac{2x+b}{x^2+bx+xc}\,dx = \ln(|x^2+bx+c|).$$

   I den andra, som är av formen

   $$\int \frac{dx}{(x+b_1)^2 + c_1},$$

   byter man ut c_1 i nämnare (och gör eventuellt ett variabelbyte)

   $$\frac{1}{c_1} \int \frac{dx}{\left(\frac{x+b_1}{\sqrt{c_1}}\right)^2 + 1} = \frac{\sqrt{c_1}}{c_1} \arctan\left(\frac{x+b_1}{\sqrt{c_1}}\right)$$

3 Integraler med trigonometeriska uttryck

Med trigonometeriska uttryck avses här uttryck som involverar de trigonometriska funktionerna $\cos x$, $\sin x$ och $\tan x$.

Det här avsnittet handlar om teknik man kan använda sig av för att (i princip) bestämma primitiva funktioner till *vissa* såna uttryck. Det går ut på att göra ett variabelbyte som leder till en (rationell) funktion som sen integreras. Tillsist går man tillbaka till den ursprungliga variabeln.

En av de viktigaste metoderna vid integration är omskrivning. Den är speciellt viktig vid integration av trigonometriska uttryck, eftersom det finns så många samband mellan trigonometriska funktioner. Mest används den trigonometriska ettan, men även formlerna för dubbla (och halva) vinkeln.

3.1 Uttryck av formen $f(\cos ax)\sin ax$ och $f(\sin ax)\cos ax$

Om uttrycket är av formen $f(\sin ax)\cos ax$ leder variabel byte till

$$\int f(\sin ax)\cos ax\,dx = \left\{\begin{array}{l} t = \sin ax \\ dt = a\cos ax\,dx \end{array}\right\} = \frac{1}{a}\int f(t)\,dt$$

och man hoppas kunna integrera f. På liknande sätt hanteras uttryck av formen $f(\cos ax)\sin ax$.

Båda dessa substitutioner faller under katergorin att man "känner igen en inre derivata". Uttrycken är i detta fall ett uttryck med nåt som bara beror på en av $\cos ax$ eller $\sin ax$ sedan multiplicerat med én faktor $\sin ax$ respektive $\cos ax$.

Exampel 3.1 *Beräkna* $\int \cos^4 5x \sin 5x\,dx$.

Lösning Vi sätter här $t = \cos 5x$ och har $dt = -5\sin 5x\,dx$, eller $-dt/5 = \sin 5x\,dx$. Detta ger

$$\int \cos^4 5x\sin 5x\,dx = -\frac{1}{5}\int t^4\,dt = -\frac{1}{25}\,t^5 = -\frac{1}{25}\,\cos^5 5x.$$

□

Exampel 3.2 *Beräkna* $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 2x + 4}\,dx$.

Lösning Vi sätter här $t = \sin 2x$ och har då $dt = 2\cos 2x\,dx$, eller $\cos 2x\,dx = dt/2$:

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 2x+4}\,dx &= \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\int\frac{dt}{(t/2)^2+1} = \frac{1}{8}\cdot 2\arctan t/2 = \\ &= \frac{1}{4}\arctan(\sin(2x)/2).\end{aligned}$$

□

Ibland måste man "förbereda" integranden för att kunna använda tekniken i detta avsnitt.

Exampel 3.3 *Beräkna* $\int \sin^5 x\,dx$.

Lösning Med hjälp av trigonometriska ettan har man

$$\begin{aligned}\int \sin^5 3x\,dx &= \int \sin^4 3x\sin 3x\,dx = \int (1-\cos^2 3x)^2\sin 3x\,dx = \{t = \cos 3x\} = \\ &= -\frac{1}{3}\int(1-t^2)^2\,dt = -\frac{1}{3}\int(1-2t^2+t^4)\,dt = -\frac{1}{3}(t-2t^3/3+t^5/5) = \\ &= -\frac{1}{3}\cos 3x + \frac{2}{9}\cos^3 3x - \frac{1}{15}\cos^5 3x.\end{aligned}$$

$\square$

Tekniken i exempel 3.3 kan användas **för att bestämma primitiva funktioner till *udda* potenser av** $\sin ax$ **och** $\cos ax$. Vi återkommer till jämna såna potenser senare.

Den fungerar även för att bestämma produkter av en potens av $\sin ax$ och en potens av $\cos ax$, **så länge en av potenserna är en udda sån**. T.ex gör omskrivningen $\sin^6 2x \cos^5 2x = \sin^6 2x \cos^4 2x \cos 2x = \sin^6 2x(1-\sin^2 2x)^2 \cos x$ att vi ska integrera ett uttryck på formen $f(\sin x)\cos x$.

Exampel 3.4 *Beräkna* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin 3x}$.

Lösning Vi förlänger med $\sin 3x$ och använder trigonometriska ettan:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sin 3x} &= \int \frac{\sin 3x}{\sin^2 3x}\,dx = \int \frac{1}{1-\cos^2 3x}\cdot \sin 3x\,dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \cos 3x,\ dt = -3\sin x\,dx \\ \sin x\,dx = -t/3\,dt \end{array} \right\} = \\
&= -\frac{1}{3}\int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{3}\int \frac{1}{(t-1)(t+1)}\,dt = \{\text{ PBU }\} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int\Big(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\Big)\,dt = \\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\ln\Big|\frac{t-1}{t+1}\Big| = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\ln\Big|\frac{\cos 3x-1}{\cos 3x+1}\Big| = \{\text{Förlänger för förenkling}\} = \\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\ln\Big|\frac{(\cos 3x-1)^2}{-\sin^2 3x}\Big| = \frac{1}{3}\ln\Big|\cot 3x - \frac{1}{\sin 3x}\Big|.
\end{aligned}$$

$\square$

Exampel 3.5 *Beräkna* $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos x + \sin 2x}\,dx$.

Lösning Vi har att $\sin 2x = 2\cos x \sin x$ och får med detta och sen förlänging med $\cos x$ att

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin x}{\cos x + \sin 2x}\,dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x(1+2\sin x)}\,dx = \int \frac{\sin x \cos x}{(1-\sin^2 x)(1+2\sin x)}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x\,dx \end{array} \right\} = \\
&= \int \frac{t}{(1-t)(1+t)(1+2t)}\,dt = \int\Big(\frac{A}{1-t}+\frac{B}{1+t}+\frac{C}{1+2t}\Big)\,dt = \\
&= \{\text{HP ger } A = \frac{1}{6},\ B = \frac{1}{2},\ C = -\frac{2}{3}\} = \frac{1}{6}\ln\Big|\frac{(1+t)^3}{(1-t)(1+2t)^2}\Big| = \\
&= \frac{1}{6}\ln\Big|\frac{(1+\sin x)^3}{(1-\sin x)(1+2\sin x)^2}\Big|.
\end{aligned}$$

$\square$

3.2 Uttryck av formen $\sin^{2n} ax$ och $\cos^{2n} ax$

Omskrivning ger att

$$\int \sin^{2n+1}(ax)\cos^m(ax)\,dx = \int (1-\cos^2 ax)^n \cos^m(ax)\sin(ax)\,dx.$$

liksom att

$$\int \sin^n(ax)\cos^{2m+1}(ax)\,dx = \int \sin^n(ax)(1-\sin^2 ax)^m \cos(ax)\,dx.$$

Dessa integraler kan allstå hanteras som i avsnitt 3.1.

För integraler av formen

$$\int \sin^{2n}(ax)\cos^{2m}(ax)\,dx$$

är situationen annorlunda. De hanteras genom att man först använder att t.ex. $\cos^2 ax = 1 - \sin^2 ax$ och sen utvecklar $\sin^{2n} ax(1-\sin^2 ax)^m$. Resultatet blir en summa av jämna potenser av $\sin ax$. Det betyder att det räcker att fundera över hur en jämn potens av $\sin ax$ (eller $\cos ax$) ska integreras. Efter ett variabelbyte räcker dett att kolla på jämna potenser av $\sin x$ ($\cos x = \sin(\pi/2 - x)$.)

Tekniken för att hitta en primitiv funktion till $\sin^{2n} x$ är att skriva den som en summa med termer av $\cos v$ för olika vinklar v (och inga potenser av cosinus-termerna).

Man kan göra detta på lite olika sätt. Ett går ut på att man använder formeln för cosinus för dubbla vinkeln: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, som ger $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$ och $\cos^2 x = (1 + \cos 2x)/2$. Man kan behöva använda detta upprepade gånger. Här är ett exempel:

Exampel 3.6 *Beräkna* $\int \sin^4 x\, dx$.

Lösning Vi har $\sin^4 x = (\sin^2 x)^2 = ((1 - \cos 2x)/2)^2 = 1/4 - \cos 2x/2 + \cos^2 2x/4$. Nu använder vi att $\cos^2 2x = (1 + \cos 4x)/2$ och får

$$\int \sin^4 x\, dx = \int \Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos 4x\Big)\, dx = \frac{3}{8}\, x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x.$$

Exampel 3.7 *Beräkna* $\int \sin^2 3x \cos^2 3x\, dx$.

Vi använder att $\cos^2 3x = 1 - \sin^2 3x$ och får att vi ska integrera $\sin^2 3x - \sin^4 3x$. Vi gör varibelbytet $t = 3x$, $dx = dt/3$ och får att

$$\int \sin^2 3x \cos^2 3x\, dx = \frac{1}{3}\int \Big(\sin^2 t - \sin^4 t\Big)\, dt.$$

Den sista termen har vi precis integrerat och den första blir

$$\int \sin^2 t\, dt = \frac{1}{2}\int (1 - \cos 2t)\, dt = \frac{1}{2}\, t - \frac{1}{4}\sin 2t$$

Totalt blir det därför

$$\begin{aligned}\int \sin^2 3x \cos^2 3x\, dx &= \frac{1}{6}\, t - \frac{1}{12}\sin 2t - \frac{1}{8}\, t + \frac{1}{12}\sin 2t - \frac{1}{96}\sin 4t = \\ &= \frac{1}{8}\, x - \frac{1}{96}\sin 12x\end{aligned}$$

Ett annat sätt att lösa just denna uppgift är att också använda att $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$. Integranden blir med den omskrivningen $\sin^2(6x)/4 = (1/4)(1/2)(1 - \cos 12x) = 1/8 - \cos(12x)/8$, som integreras till $x/8 - \sin(12x)/96$. $\square$

Om man vill få systematik i omskrivningen av $\sin^{2n} x$ som en summa av cosinus-termer för olika vinklar kan man använda att

$$\sin x = \frac{1}{2i}(\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}),$$

där $\mathrm{e}^{ix} = \cos x + i \sin x$. Man får då

$$\sin^{2n} x = (-1)^n \cdot \frac{1}{2^{2n}}(\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix})^{2n},$$

där man sen använder binomialsatsen för att utveckla högra ledet och att $\mathrm{e}^{ikx} + \mathrm{e}^{-ikx} = 2\cos kx$.

Här är ett exempel på detta:

Exampel 3.8 *Skriv* $\sin^6 x$ *som en summa av cosinus-termer.*

Lösning Vi har

$$\sin^6 x \quad = \quad \Big(\frac{1}{2i}(\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix})\Big)^6$$

Koefficienterna i Pascals triangel på raden för potenser av 6 är 1, 6 , 15, 20, 15, 6, 1. Utveckling ger

$$\begin{aligned}
\sin^6 x &= -\frac{1}{64}(\mathrm{e}^{i6x} - 6\mathrm{e}^{i4x} + 15\mathrm{e}^{i2x} - 20 + 15\mathrm{e}^{-i2x} - 6\mathrm{e}^{-i4x} + \mathrm{e}^{-i6x}) = \\
&= -\frac{1}{64}(2\cos 6x - 12\cos 4x + 30\cos 2x - 20) = \frac{5}{16} - \frac{15}{32}\cdot\cos 2x + \frac{3}{16}\cdot\cos 4x - \frac{1}{32}\cdot\cos 6x.
\end{aligned}$$

□

3.3 Uttryck av formen $\dfrac{\sin^m ax}{\cos^n ax}$

I kurboken görs, som ofta i amerikanska läroböcker, en viss affär av att integrera uttryck av formen $\tan^p x \sec^q x$. Eftersom vi inte ägnat sekant-funktionen nån vidare uppmärksamhet blir det märkligt, men $\sec x = 1/\cos x$ och $\tan x = \sin x/\cos x$, så varje uttryck $\tan^p x \sec^q x$ är ett uttryck av formen $\sin^m x/\cos^n x$ (där $m \leq n$), så man kan lika gärna ägna sig åt såna kvoter generellt (och det är inte svårare).

När m är ett udda posivit heltal, låt oss säga $m = 2k+1$ kan man använda tekniken i avsnitt 3.1 efter omskrivning:

$$\int \frac{\sin^{2k+1} x}{\cos^n x}\,dx \quad = \quad \int \frac{(1-\cos^2 x)^k}{\cos^n}\cdot \sin x\,dx = \{t = \cos x\} = -\int \frac{(1-t^2)^k}{t^n}\,dt,$$

som inte är nån svårighet att beräkna.

Exampel 3.9 *Beräkna* $\int \tan^3 x\,dx$.

Lösning Vi har

$$\begin{aligned}
\int \tan^3 x\,dx &= \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}\,dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^3 x}\cdot \sin x\,dx = \{t = \cos x\} = \int \frac{t^2-1}{t^3}\,dt = \\
&= \int \Big(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^3}\Big)\,dt = \ln|\cos x| + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}
\end{aligned}$$

□

När m är jämnt, låt oss säga $m = 2k$, är situationen annorlunda. Omskrivning ger

$$\int \frac{\sin^{2k} x}{\cos^n x}\,dx \quad = \quad \int \frac{(1-\cos^2 x)^k}{\cos^n x}\,dx,$$

så efter utveckling av potensen i täljaren ser vi att det räcker att hantera

$$\int \frac{1}{\cos^n x}\,dx.$$

När n är jämnt, låt oss säga $n = 2k$, kan vi utnyttja variabelbytet $t = \tan x$, som ger $dt = dx/\cos^2 x$ och $1/\cos^2 x = 1 + \tan^2 x = 1 + t^2$. Det ger då

$$\int \frac{dx}{\cos^{2k} x} = \int \Big(\frac{1}{\cos^2 x}\Big)^{k-1}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int (1+t^2)^{k-1}\,dt$$

som är lätt att integrera efter utveckling av potensen.

Ibland kan man hitta genvägar som underlättar jämfört med att följa den allmänna metoden:

Exampel 3.10 *Beräkna* $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}\,dx$.

Lösning Vi har

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}\,dx = \int \tan^4 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \{t = \tan x\} = \int t^4\,dt = \frac{1}{5}\cdot \tan^5 x.$$

□

Exampel 3.11 *Beräkna* $\int \tan^4 x\,dx$.

Lösning Vi har

$$\begin{aligned}
\int \tan^4 x\,dx &= \int \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x}\,dx = \int \frac{(1-\cos^2 x)^2}{\cos^4 x}\,dx = \int \Big(\frac{1}{\cos^4 x} - 2\cdot\frac{1}{\cos^2 x} + 1\Big)\,dx = \\
&= \int \frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx - 2\tan x + x = \left\{\begin{array}{l} t = \tan x,\ 1/\cos^2 x = 1+t^2 \\ dt = 1/\cos^2 x \end{array}\right\} = \\
&= \int (1+t^2)\,dt - 2\tan x + x = \tan x + \frac{1}{3}\cdot\tan^3 x - 2\tan x + x = \frac{1}{3}\cdot \tan^3 x - \tan x + x.
\end{aligned}$$

□

När $n = 1$ har vi, med tekniken i avsnitt 3.1, efter förläning med $\cos x$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\cos x} &= \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\,dx = \{t = \sin x\} = \int \frac{dt}{(1-t)(1+t)} = \{\text{PBU med HP}\} = \\
&= \frac{1}{2}\int \Big(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\Big)\,dt = \frac{1}{2}\ln\Big|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\Big| = \frac{1}{2}\ln\Big|\frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x}\Big| = \ln\Big|\frac{1+\sin x}{\cos x}\Big| \\
&= \ln\Big|\frac{1}{\cos x} + \tan x\Big|.
\end{aligned}$$

Integrander med annan udda potens av $\cos x$ i nämnaren kan beräknas med (upprepad) partiell integration enligt formel:

$$\begin{aligned}
I_{2k+1} = \int \frac{dx}{\cos^{2k+1} x} &= \int \frac{1}{\cos^{2k-1}}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \{\text{PI}\} = \frac{1}{\cos^{2k-1} x}\cdot\tan x - (2k-1)\int \frac{\sin x}{\cos^{2k}}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \\
&= \frac{\sin x}{\cos^{2k} x} - (2k-1)\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^{2k+1} x}\,dx = \frac{\sin x}{\cos^{2k} x} - (2k-1)(I_{2k+1} - I_{2k-1}),
\end{aligned}$$

som ger

$$\begin{aligned}
I_{2k+1} = \int \frac{dx}{\cos^{2k+1} x} &= \frac{1}{2k}\cdot\frac{\sin x}{\cos^{2k} x} + \frac{2k-1}{2k}\int \frac{1}{\cos^{2k-1}}\,dx = \\
&= \frac{1}{2k}\cdot\frac{\sin x}{\cos^{2k} x} + \frac{2k-1}{2k} I_{2k-1},
\end{aligned}$$

där

$$I_1 = \int \frac{dx}{\cos x}\,dx = \ln\Big|\frac{1+\sin x}{\cos x}\Big|.$$

4 Integraler med rotuttryck

När det gäller integraler med rotuttryck finns det en rad olika substitutioner och ansatser man kan göra för att beräkna dem. Vi ska här begränsa oss till fallet då det under roten står ett polynom av grad 1 eller 2 och en kvot av två polynom av grad 2. Gemensamt för de olika typerna av integraler vi ska behandla är att det ibland finns genvägar vid berökningarna, t.ex. när man “känner igen en inre derivata”.

4.1 Integraler med $\sqrt{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$

En standardsubstitution att pröva när integranden innehåller $\sqrt{(ax+b)/(cx+d)}$ (där minst en av a och c är $\neq 0$) är att sätta $y = \sqrt{(ax+b)/(cx+d)}$. Observera att detta gäller även när $c = 0$, $d = 1$: $y = \sqrt{ax+b}$.

Exampel 4.1 *Beräkna* $\displaystyle\int \frac{x+\sqrt{x+1}}{x+2}\,dx$.

Lösning Sätt $y = \sqrt{x+1}$, så att $x = y^2 - 1$ och $dx = 2y\,dy$. Variabelbytet ger

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+\sqrt{x+1}}{x+2}\,dx &= \int \frac{y^2-1+y}{y^2+1}\cdot 2y\,dy = \int \frac{2y(y^2+1)+2(y^2+1)-(4y+2)}{y^2+1}\,dy = \\
&= \int \Big(2y+2-2\frac{2y}{y^2+1}-2\frac{1}{y^2+1}\Big)\,dy = y^2+2y-2\ln(y^2+1)-2\arctan y = \\
&= x+1+2\sqrt{x+1}-2\ln(x+2)-2\arctan(\sqrt{x+1}).
\end{aligned}$$

□

Exampel 4.2 *Beräkna* $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{\frac{x+4}{x+1}}\,dx$.

Lösning Med $y = \sqrt{(x+4)/(x+1)}$ gäller att $x = (4-y^2)/(y^2-1) = -1+3/(y^2-1)$ och $dx = -6y/(y^2-1)^2$. Omräknade gränser ger därför

$$\int_0^2 \sqrt{\frac{x+4}{x+1}}\,dx = -6\int_2^{\sqrt{2}} \frac{y^2}{(y-1)^2(y+1)^2}\,dy.$$

För att underlätta PBU noterar vi att

$$\frac{y^2}{(y-1)^2(y+1)^2} = \Big(\frac{y}{(y-1)(y+1)}\Big)^2.$$

Vi kan därför ta en genväg vid PBU:

$$\begin{aligned}
\frac{y^2}{(y-1)^2(y+1)^2} &= \Big(\frac{y}{(y-1)(y+1)}\Big)^2 = \{\text{ ”Inre” PBU }\} = \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{y-1}+\frac{1}{y+1}\Big)^2 = \{\text{ Utveckling }\} = \\
&= \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{(y-1)^2}+\frac{2}{(y-1)(y+1)}+\frac{1}{(y+1)^2}\Big) = \{\text{ PBU i mitten }\} = \\
&= \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{(y-1)^2}+\frac{1}{y-1}-\frac{1}{y+1}+\frac{1}{(y+1)^2}\Big).
\end{aligned}$$

Detta ger

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \sqrt{\frac{x+4}{x+1}}\,dx &= \frac{6}{4}\int_{\sqrt{2}}^2 \Big(\frac{1}{(y-1)^2}+\frac{1}{y-1}-\frac{1}{y+1}+\frac{1}{(y+1)^2}\Big)\,dy = \\
&= \frac{3}{2}\Big[-\frac{1}{y-1}+\ln\Big|\frac{y-1}{y+1}\Big|-\frac{1}{y+1}\Big]_{\sqrt{2}}^2 = \left\{\begin{array}{l}\text{Förlängning}\\ \text{Gemensamt bråk}\end{array}\right\} = \\
&= \frac{3}{2}\Big[\ln\Big|\frac{(y-1)^2}{y^2-1}\Big|-\frac{2y}{y^2-1}\Big]_{\sqrt{2}}^2 = \frac{3}{2}\Big(\ln\Big(\frac{1}{3}\Big)-\ln(3-2\sqrt{2})-\frac{4}{3}+2\sqrt{2}\Big) = \\
&= 3\sqrt{2}-2-\frac{3}{2}\ln(9-6\sqrt{2}).
\end{aligned}$$

□

4.2 Integraler med rot ur andragradare

Vid den här typen av integraler finns det tre typer av substitutioner man kan använda sig av beroende på situationen. Samtliga är av karaktären "sätt x till nåt som underlättar," vilket är den minst uppenbara typen av variabelbyten.

Vid rot av andragradare kan man först göra kvadratkomplettering och sedan ett förberedande variabelbyte:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \begin{cases} \sqrt{a}\sqrt{(x+b_1)^2+c_1} & = \{t = x+b_1\} = \sqrt{a}\sqrt{t^2+c_1} \quad \text{när } a>0 \\ \sqrt{-a}\sqrt{-(x+b_1)^2+c_1} & = \{t = x+b_1\} = \sqrt{-a}\sqrt{c_1-t^2} \quad \text{när } a<0 \end{cases}$$

Det betyder att, efter ett sånt byte, räcker det att kunna hantera uttryck av formen $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{x^2+a^2}$ och $\sqrt{x^2-a^2}$ (där vi använt a och x i ny betydelse), där $a>0$.

Vid trigonometerisk substitution utnyttjar man att

$$\begin{aligned} a^2 - a^2\sin^2 t &= a^2\cos^2 t, \text{ eftersom } a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t = a^2, \\ a^2\tan^2 t + a^2 &= a^2/\cos^2 t, \text{ som båda är derivata till } a^2\tan t, \text{ eller omskrivet} \\ a^2/\cos^2 t - a^2 &= a^2\tan^2 x. \end{aligned}$$

Detta ger följande

Vid

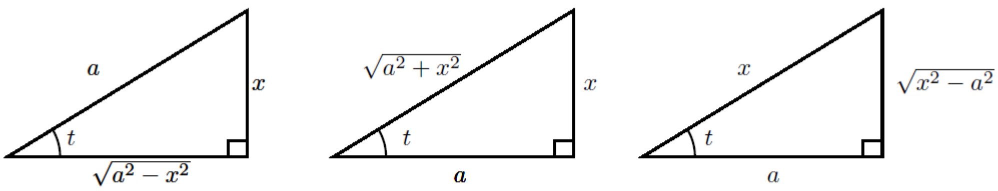
$\sqrt{a^2-x^2}$ sätt $x = a\sin t$, $-\pi/2 \le t \le \pi/2$, så att $\sqrt{a^2-x^2} = a\cos t$, $dx = a\cos t$

$\sqrt{x^2+a^2}$ sätt $x = a\tan t$, $-\pi/2 < t < \pi/2$, så att $\sqrt{x^2+a^2} = \dfrac{a}{\cos t}$, $dx = \dfrac{a}{\cos^2 t}$

$\sqrt{x^2-a^2}$ sätt $x = \dfrac{a}{\cos t}$, $0 \le t < \pi/2$, $\pi \le t < 3\pi/2$, så att $\sqrt{x^2+a^2} = a\tan t$, $dx = \dfrac{a\sin t}{\cos^2 t}$.

Förklaringen till de olika valen av intervall är att det i substitutionen måste gå att entydigt lösa ut t som funktion av $x \in [-a, a]$, samtidigt som man vill undvika absolutbelopp när kvadratroten uttrycks med variabeln t. I praktiskt räknande räcker det att komma ihåg att inte ta med dessa absolutbelopp.

När man använder dessa substitutioner har man ibland användning av hur övriga trigonometeriska funktioner uttrycks med hjälp av x. Då kan följande hjälptrianglar underlätta (i tur och ordning):



$\sin t = x/a$ | $\tan x = x/a$ | $\cos t = a/x$

$\cos t = \sqrt{a^2-x^2}/a$ | $\cos t = a/\sqrt{a^2+x^2}$ | $\sin t = \sqrt{a^2-x^2}/x$

$\tan t = x/\sqrt{a^2-x^2}$ | $\sin t = x/\sqrt{a^2+x^2}$ | $\tan t = \sqrt{x^2-a^2}/a$

Exampel 4.3 *Beräkna* $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx$.

Lösning Sätt $x = \sin t$ så att $\sqrt{1-x^2} = \cos t$ och $dx = \cos t\,dt$. Det ger

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)\,dt = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{2}\sin 2t) = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sin t\cos t = \\ &= \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

Integralen kan även beräknas med partiell integration:

$$\begin{aligned} I = \int \sqrt{1-x^2}\,dx &= \{\text{ PI }\} = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\sqrt{1-x^2} - \int \Big(\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Big)\,dx = \\ &= x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}\,dx + \arcsin x = x\sqrt{1-x^2} - I + \arcsin x, \end{aligned}$$

som ger

$$2I = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x, \qquad \text{eller} \qquad I = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}.$$

□

Man ska se upp när man integrerar uttryck med rot ur andragradare. Ibland kan man känna igen en inre derivata som gör att det går att använda en enklare substitution än en trigonometrisk.

Exampel 4.4 *Beräkna* $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$.

Lösning Den tirognometriska substitutionen skulle här varit att sätta $x = 1/\cos t$, men vi känner igen x i integranden som derivatan till x^2-1, så när som på en konstant. Vi sätter därför $t = x^2-1$ så att $dt/2 = x\,dx$, vilket ger

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \sqrt{t} = \sqrt{x^2-1}.$$

□

Exampel 4.5 *Beräkna* $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$.

Lösning Här ser vi ingen genväg utan sätter $x = 1/\cos t$, så att $\sqrt{x^2-1} = \tan x$ och $dx = \sin t\,dt/\cos^2 t$, vilket ger

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx &= \int \frac{\cos t}{\sin t}\cdot\frac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt = \int \frac{1}{\cos t}\,dt = \int \frac{\cos t}{1-\sin^2}\,dt = \left\{\begin{array}{l} u = \sin t \\ du = \cos t \end{array}\right\} = \\ &= \int \frac{du}{(1-u)(1+u)} = \{\text{ PBU }\} = \frac{1}{2}\int \Big(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}\Big)\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| = \\ &= \{\text{ Förläng med } 1+u\} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(1+u)^2}{1-u^2}\right| = \ln\left|\frac{1+\sin t}{\cos t}\right| = \ln|x + \sqrt{x^2-1}| \end{aligned}$$

□

I nästa exempel behöver vi först göra en kvadratkomplettering för att kunna utnyttja en trigonometrisk substitution.

Exampel 4.6 *Beräkna* $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$.

Lösning

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}\,dx &= \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+4}} = \left\{\begin{array}{l} y = x+1 \\ dy = dx \end{array}\right\} = \int \frac{dy}{\sqrt{y^2+4}} = \left\{\begin{array}{l} y = 2\tan t \\ dy = 2\,dt/\cos^2 t \end{array}\right\} = \\ &= \int \frac{\cos t}{2}\cdot\frac{2}{\cos^2 t}\,dt = \int \frac{dt}{\cos t} = \{\text{ Se tidigare exempel }\} = \ln\left|\frac{1+\sin t}{\cos t}\right| = \\ &= \ln\left|\frac{1}{\cos t} + \tan t\right| = \ln\left|\frac{2}{\cos t} + 2\tan t\right| - \ln 2 = \ln|\sqrt{y^2+2^2} + y| - \ln 2 = \\ &= \ln|\sqrt{x^2+2x+5} + x + 1| - \ln 2. \end{aligned}$$

Även $\ln|\sqrt{x^2+2x+5} + x + 1|$ är en primitiv funktion till $1/(x^2+2x+5)$. □