Lösningar till MVE016 Matematisk analys i en variabel för I1 17-xx-yy

1. (a) Division ger

$$\begin{aligned}\frac{y'}{1+y^2} &= -x \cdot \frac{(1+x^2)^{1/2}}{(1+x^2)^2} = \\ &= -x(1+x^2)^{-3/2}.\end{aligned}$$

vilket ger

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{1+y^2} &= -\int x(1+x^2)^{-3/2}\,dx \\ \arctan y &= (1+x^2)^{-1/2} + C.\end{aligned}$$

där C är en godtycklig konstant. Vi ska ha $1 = y(0)$, så $\arctan(1) = 1 + C$, och $C = \pi/4 - 1$. Vi tar tangens av båda sidor och får $y = \tan((1+x^2)^{-1/2} + \pi/4 - 1)$.
Svar: $y(x) = \tan(1/\sqrt{1+x^2} + \pi/4 - 1)$.

(b) Division med $x > 0$ ger $y' + (x + 1/x)y = e^{x^2/2}$. Vi har $\int (x+1/x)\,dx = x^2/2 + \ln x$, så integrerande faktor är $e^{x^2/2+\ln x} = xe^{x^2/2}$. Ekvationen multipliceras med denna och vi får

$$D(yxe^{x^2/2}) = xe^{x^2}$$

som integreras till $yxe^{x^2/2} = e^{x^2}/2 + C_1$, där C_1 är en godtycklig konstant. Vi löser ut y och får svaret ($C = 2C_1$)

$$y(x) = \frac{e^{x^2/2}}{2x} + \frac{C}{xe^{x^2/2}} = \frac{e^{x^2}+C}{2xe^{x^2/2}}$$

Svar: $y(x) = (e^{x^2} + C)/(2xe^{x^2/2})$, där C är en godtycklig konstant.

2. (a) Kvadratkomplettering och integration ger

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}\,dx = \arcsin(x-1)(+C)$$

Svar: $\arcsin(x-1)(+C)$.

(b) I integralen $\int_2^\infty 1/(x(x-1)^2)\,dx$ är enda generalisering i ∞, eftersom $1/(x(x-1)^2)$ är definierat och kontinuerligt när $x > 1$.
Gör partialbråksuppdelning och ansätter

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x-1}.$$

Skriver på gemensamt bråk och får att täljarna ska vara lika, dvs

$$1 = a(x-1)^2 + bx + cx(x-1).$$

$x = 0$ ger $a = 1$, $x = 1$ ger $b = 1$. Vi jämför x^2 på båda sidor och får $0 = a + c$, dvs $c = -1$.

Vi får

$$\begin{aligned}\int_2^{\infty} \frac{1}{x(x-1)^2} &= \int_2^{\infty} \Big(\frac{1}{x} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1}\Big)\, dx = \Big[\ln x - \frac{1}{x-1} + \ln(x-1)\Big]_2^{\infty} = \\ &= \Big[\ln\Big(\frac{x}{x-1}\Big) - \frac{1}{x-1}\Big]_2^{\infty} = \ln 1 - 0 - \ln 2 + 1 = 1 - \ln 2.\end{aligned}$$

Svar: $1 - \ln 2$.

3. Vi har

$$\begin{aligned} e^t &= 1 + t + t^2/2 + \cdots \\ \ln(1+t) &= t - t^2/2 + \cdots \\ \cos t &= 1 - t^2/2 + t^4/24 - \cdots. \end{aligned}$$

Vi får

$$\begin{aligned}\frac{(e^{2x}-1)\ln(1+x^3)}{(1-\cos 3x)} &= \frac{((1+2x+2x^2+\cdots)-1)(x^3 - x^6/2 + \cdots)}{(1-(1-9x^2/2+81x^4/24-\cdots))^2} = \\ &= \frac{(2x+2x^2+\cdots)(x^3-x^6/2+\cdots)}{(9x^2/2 - 81x^4/24+\cdots)(9x^2/2-81x^4/24+\cdots)} = \\ &= \frac{2x^4+2x^5+\cdots}{81x^4/4 - 729x^6/12+\cdots} = \frac{2+2x+\cdots}{81/4-729x^2/12+\cdots} \to \frac{2}{81/4} = \frac{8}{81},\end{aligned}$$

när $x \to 0$.

Svar: $8/81$.

4. Serien är alternerande och $1/(2n(2n-1)9^n)$ avtar mot 0, så den är konvergent enligt kriteriet för alternerande serier.

Vi sätter $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{2n}/(2n(2n-1))$ och har då att seriens summa är $f(1/3)$. Vi försöker känna igen $f(x)$ som en "vanlig" funktion och har, när $|x| < 1$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{2n-1} \\ f''(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{2n-2} = -\sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{-1}{1+x^2} \end{aligned}$$

Integration ger $f'(x) = -\arctan x + C_1$, men $f'(0) = 0$, så $C_1 = 0$. Ytterligare integration ger

$$\begin{aligned} f(x) &= -\int 1 \cdot \arctan x\, dx = \{\text{ PI }\} = -x\arctan x + \int \frac{x}{1+x^2}\, dx = \\ &= -x \arctan x + \frac{1}{2} \cdot \ln(1+x^2) + C_2, \end{aligned}$$

men $f(0) = 0$, så $C_2 = 0$. Detta ger att summan är $f(1/3) = \arctan(1/3)/3 + \ln(10/9)/2$.

Svar: $f(1/3) = \arctan(1/3)/3 + \ln(10/9)/2$.

5. Skalformeln ger att kroppens volym är

$$2\pi \int_0^1 x(x^2+x)\, dx = 2\pi \Big[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = 2\pi\Big(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\Big) = \frac{7\pi}{6}.$$

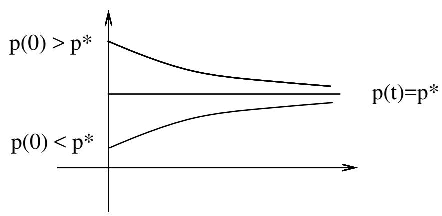
Svar: $7\pi/6$.

6. Låt $p(t)$ vara priset vid tiden t. Vi vet att $p(0) = p$, att jämviktspriset är $p*$ och att $p'(t) = k(p * - p(t)$, som vi kan skriva om till en separabel ekvation, eller som en första ordningens linjär: $p'(t) + kp(t) = kp*$. Konstanten k är > 0, eftersom $p(t)$ avtar om $p(t) > p*$ och växer om $p(t) < p*$.

   Vi föredrar första ordningens linjär och har $\int k\,dt = kt$, så integrerande faktor är e^{kt}. Detta ger

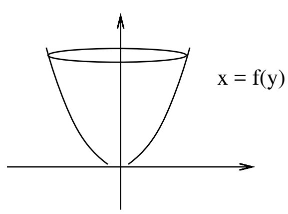
$$\begin{aligned} D(e^{kt}p(t)) &= p * \cdot k e^{kt} \text{ som integreras:} \\ e^{kt}p(t) &= p * \cdot e^{kt} + C. \end{aligned}$$

   Men $p(0) = p$ ger $p = p * + C$, dvs $C = p - p*$. Vi löser ut $p(t)$ och får $p(t) = p * + (p * - p)e^{-kt}$. Vi har att $p(t) \to p*$, när $t \to \infty$. Om $p > p*$ avtar $p(t)$ mot $p*$, om $p < p*$ växer $p(t)$ mot $p*$, och om $p = p*$ är $p(t)$ konstanten $p*$.



   Svar: $p(t) = p * + (p * - p)e^{-kt}$, där $k > 0$ är en konstant.

7. Idé-skiss för behållaren:



   Skivformeln ger att vätskans volym när höjden är y ges av $v(y) = \int_0^y \pi f(s)^2\,ds$. Enligt Torricelli gäller att $v'(y(t))y'(t) = k\sqrt{y(t) + c}$, för några konstanter k och c. Här är $k < 0$, eftersom $y'(t)$ är negativt, medan $v'(y)$ är > 0, för volymen växer med y.

   Vi har $v'(y) = \pi f(y)^2$. Vi vill att $y'(t)$ ska vara konstant, låt oss säga $c_1 < 0$.

   Vi får $f(y)^2 = \frac{k}{\pi c_1}\sqrt{y + c}$. Vi sätter $\sqrt{k/(\pi c_1)} = a > 0$ och har att $f(y) = a(y + c)^{1/4}$ där $a > 0$.

   Svar: $f(y) = a(y + c)^{1/4}$, där a och c är positiva konstanter.