

Matematisk Analys i en variabel för I1, MVE016

Lösningar till tentamen 19 dec 2012

1.

a. $\int_0^1 x e^{2x} dx = \left[\frac{x e^{2x}}{2} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{2x}}{2} dx = \frac{e^2+1}{4}$

b. $\int x^2 \cos x^3 dx = \frac{\sin x^3}{3} + C$

c. $\int_0^2 \frac{dx}{(x+1)(x+2)} = \left[\ln \frac{x+1}{x+2} \right]_0^2 = \ln \frac{3}{2}$

2.

a. Serien är konvergent, använd kvotkriteriet: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 0$

b. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 1$ så $R=1$ och serien konvergerar om $|x+2| < 1$ alltså $-3 < x < -1$

För $x = -3$ bildas serien $\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n}$ som är betingat konvergent.

För $x = -1$ bildas serien $\sum_1^\infty \frac{1}{n}$ som är divergent.

Svar: för $-3 \leq x < -1$

3. Homogenlösningen är $y_h = A e^{-2x} + B e^{-3x}$.

För partikulärlösningen ansätts $y_p = a e^{-x}$ som ger $a = 1$.

Man deriverar lösningen och får ett system i A och B som löses lätt.

Svar: $y = 5e^{-2x} - 4e^{-3x} + e^{-x}$

4. Maclaurinutveckla täljare och nämnare till och med grad 4.

Man får då gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^4}{6} + O(x^6)}{\frac{5x^4}{3} + O(x^6)} = \frac{1}{10}$

5. Integralen är konvergent eftersom $0 < \frac{1}{\sqrt{x^3+1}} < \frac{1}{\sqrt{x^3}}$ och $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ är konvergent.

6. Halvcirkorna får radien $\frac{\cos x}{2}$. Volymen ges av integralen över snitten med tjocklek dx och

area $A(x) = \frac{\pi \left(\frac{\cos x}{2}\right)^2}{2}$, dvs $2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi \cos^2 x}{8} dx = \frac{\pi^2}{16}$ (använd dubbla vinkeln vid integrationen.)

7.

a. Om $s(t)$ är mängden salt vid tiden t får vi differentialekvationen $s' = 2 - \frac{s}{100}$ som man löser med integrerande faktor och får $s = 200 + Ce^{-0.01t}$
Begynnelsevillkoret ger $s = 200(1 - e^{-0.01t})$

b. Här blir differentialekvationen $s' = 2 - \frac{2s}{100-t}$. Även denna löses med integrerande faktor: man får $\left(\frac{s}{(100-t)^2}\right)' = \frac{2}{(100-t)^2}$ varför $s = 2(100 - t) + C(100 - t)^2$.
Begynnelsevillkoret ger $C = \frac{2}{100}$.

Svar: $s = \frac{100t-t^2}{50}$

8.

a. Se boken.

b. Vänsterledet är längden av kurvan $y = \sin x$ från origo till punkten $(\alpha, \sin \alpha)$.
Högerledet är längden av **sträckan** från origo till samma punkt.
Då måste den angivna olikheten gälla.