MVE016 Analys för I1

Tentamen 25/4-14

Svar / lösningar

1a) $$\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2} \, dx = \frac{\pi}{2}$$

b) $$\int_0^1 \frac{dt}{e^t + e^{-t}} = \int_0^1 \frac{e^t \, dt}{e^{2t}+1} = \Big[\arctan(e^t)\Big]_0^1 =$$

$$= \arctan e - \frac{\pi}{4}$$

c) $$\int \ln(x^2+1)\, dx = x \ln(x^2+1) - \int x \frac{2x}{x^2+1}\, dx =$$

$$= x \ln(x^2+1) - 2x + 2\arctan x + C$$

2a) Kvotkriteriet: $a_n = \dfrac{2^{n^2}}{n!}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{(n+1)^2} \cdot n!}{2^{n^2} \cdot (n+1)!} = \frac{2^{2n+1}}{n+1} \to \infty \quad \text{då } n \to \infty$$

Svar: nej!

2b) Här är $a_n = n^n$

och $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot (n+1) \to \infty$ då $n \to \infty$

eftersom $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e$

Svar: för $x = 0$

(3)

Homogen lösning $y_h = A\cos 3x + B\sin 3x$

För partikulärlösning y_p, ansätt $y_p = a\sin 2x + b\cos 2x$

Då blir $y_p'' + 9y_p = 9\sin 2x \Leftrightarrow 5a\sin 2x + 5b\cos 2x =$

$= 9\sin 2x$ så $\begin{cases} a = 9/5 \\ b = 0 \end{cases}$

Svar: $y = A\cos 3x + B\sin 3x + \frac{9}{5}\sin 2x$

där A, B godt. reella konstanter

(4)

~~Då~~ $\frac{2 + e^{-x}}{x} \geq \frac{2}{x}$ då $x \geq 1$

och $\int_1^{\infty} \frac{2\,dx}{x}$ är divergent

Svar: integralen är divergent

(5)

$$\frac{dy}{(1-y)(1+y)} = dt$$

Eftersom $y(0)=0$ kan $y = \pm 1$ ej vara en lösning

Partialbråksuppdela: $\frac{1}{1-y} + \frac{1}{1+y}\, dy = 2dt$

så $\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right| = 2t + C$, $\frac{1+y}{1-y} = D \cdot e^{2t}$

$y(0)=0 \Rightarrow D = 1$

Svar: $y = \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}$

(6)

Vi använde $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \cdot \cos(\theta x)$

så att $\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{6} + \frac{x^{10}}{120} \cdot \cos(\theta x^2)$

$$\int_0^1 \sin x^2\, dx = \int_0^1 x^2 - \frac{x^6}{6}\, dx + \int_0^1 \frac{x^{10}}{120} \cdot \cos(\theta x^2)\, dx$$

då $\int_0^1 x^2 - \frac{x^6}{6}\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{42}\right]_0^1 = \frac{13}{42}$

Feluppskattning: $\left| \int_0^1 \frac{x^{10}}{120} \cdot \cos(t x^2)\, dx \right| \leq$

$\leq \int_0^1 \left| \frac{x^{10}}{120} \cdot \cos(t x^2) \right| dx \leq \int_0^1 \frac{x^{10}}{120}\, dx = \left[\frac{x^{11}}{11 \cdot 120} \right]_0^1 <$

$< 0{,}001$

Svar: $\int_0^1 \sin x^2\, dx \approx \frac{13}{42}$

(7)

Eftersom $3 < \pi < 3{,}2$ så $\cancel{3\pi <}$

$9 < 3\pi < 9{,}6$

Därför blir $\int_\pi^{3\pi} \lfloor x \rfloor\, dx =$

$= 3 \cdot (4 - \pi) + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 \cdot (3\pi - 9) =$

$= 24\pi - 39$

8 a) se boken

b) Skriv $p(x) = \sum_{r=0}^{g} k_r x^r$ där $k_g \neq 0$

Sätt $b_n = p(n)\, a_n$

Kvotkriteriet på serien $\sum_{1}^{\infty} b_n$ kräver då

att vi beräknar $\lim_{n \to \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n}$

Eftersom $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{p(n+1) \cdot a_{n+1}}{p(n) \cdot a_n}$ räcker det

att visa att $\lim_{n \to \infty} \frac{p(n+1)}{p(n)} = 1$

$$\frac{p(n+1)}{p(n)} = \frac{k_0 + k_1(n+1) + k_2(n+1)^2 + \ldots + k_g(n+1)^r}{k_0 + k_1 n + k_2 n^2 + \ldots + k_g n^r}$$

Förkorta med n^r så går alla termer utom de

sista mot 0 och $\frac{k_g (n+1)^r}{n^r} \to k_g$ i täljaren