Lösningar till MVE016 Matematisk analys i en variabel för I1 17-08-14

1. (a) Division ger

$$y' + \frac{\sin x}{2+\cos x} \cdot y = 2 + \cos x.$$

Ekvationen är linjär av första ordningen. Integration av koefficienten framför y ger

$$\int \frac{\sin x}{2+\cos x}\, dx \quad = \quad -\ln(2+\cos x)$$

Integrerande faktor är därför

$$e^{-\ln(2+\cos x)} \quad = \quad \frac{1}{2+\cos x}$$

Multiplikation med denna ger ekvationen

$$D\Big(y \cdot \frac{1}{2+\cos x}\Big) \quad = \quad \frac{2+\cos x}{2+\cos x} = 1.$$

Integration ger

$$\begin{aligned} y \cdot \frac{1}{2+\cos x} &= x + C \\ y &= (x+C)(2+\cos x), \end{aligned}$$

där C är en godtycklig konstant.

Svar: $y = (x+C)(2+\cos x)$, där C är en godtycklig konstant.

(b) Den homogena ekvationen har karakteristisk ekvation $0 = r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2$, som ger dubbelroten $r = 1$. Lösningsformel ger att lösningarna till den homogena ekvationen är

$$y_h \quad = \quad e^x(Ax + B),$$

där A och B är godtyckliga konstanter.
Vi söker en partikulärlösning och ansätter $y_p = e^{2x}(ax+b)$. Vi har $y_p' = e^{2x}(2ax + 2b + a)$ och $y_p'' = e^{2x}(4ax + 4b + 2a + 2a)$, som efter insättning ger

$$(ax + b + 2a)e^{2x} \quad = \quad xe^{2x}$$

vilket ger $a = 1$, $b = -2$ så $y_p = e^{2x}(x-2)$.
Vi har att $y = y_h + y_p = e^x(Ax+B) + e^{2x}(x-2)$. Begynnelsevillkor ger $-2 = y(0) = B - 2$, så $B = 0$. Derivering ger $y' = e^x(Ax + A) + e^{2x}(2x - 4 + 1)$. Begynnelsevillkor ger $1 = y'(0) = A - 3$, så $A = 4$.

Svar: $y(x) = 4xe^x + (x-2)e^{2x}$.

2. (a) Varibalebytet $s = t+1,\ ds = dt$ ger

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{t+2}{(t+1)^3}\,dt &= \int_1^2 \frac{s+1}{s^3}\,dt = \int_1^2 \Big(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^3}\Big)\,ds = \Big[-\frac{1}{s}-\frac{1}{2s^2}\Big]_1^2 = \\ &= -\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+1+\frac{1}{2} = \frac{7}{8}.\end{aligned}$$

Svar: 7/8.

(b) Vi har

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/6} \frac{\cos t}{\cos 2t+1}\,dt &= \Big\{\cos 2t = 1-2\sin^2 t\Big\} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6}\frac{\cos t}{1-\sin^2 t}\,dt = \Big\{s=\sin t,\ ds = \cos t\,dt\Big\} = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{1/2}\frac{1}{1-s^2}\,ds = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{1/2}\Big(\frac{1}{1-s}+\frac{1}{1+s}\Big)\,ds = \frac{1}{4}\Big[\ln\Big|\frac{1+s}{1-s}\Big|\Big]_0^{1/2} = \\ &= \frac{1}{4}\cdot\ln 3\end{aligned}$$

Svar: $\ln(3)/4$.

3. Vi har kända Maclaurinutvecklingar:

$$\begin{aligned}\sin x &= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\text{ termer av högre grad}\\ \arctan t &= t-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}+\text{ termer av högre grad}\\ \arctan x^2 &= x^2-\frac{x^6}{3}+\text{ termer av högre grad}\\ \frac{1}{1-t} &= 1+t+t^2+t^3+\text{ termer av högre grad}\\ \frac{1}{1-x^2} &= 1+x^2+x^4+x^6+\text{ termer av högre grad}\end{aligned}$$

Maclaurinpolynomet P_5 av grad 5 kan beräknas som summan av termer av grad högst 5 i uttrycket

$$\Big(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\Big)\cdot x^2\cdot\Big(1+x^2+x^4\Big),$$

vilket är samma som dito i uttrycket

$$x^3\cdot\Big(1-\frac{x^2}{3!}\Big)\Big(1+x^2\Big),$$

Detta ger

$$P_5(x) = x^3+\Big(1-\frac{1}{6}\Big)\cdot x^5 = x^3+\frac{5}{6}\cdot x^5.$$

Svar: $x^3+5x^5/6$.

4. (a) Med

$$a_k = \frac{x^{4k+1}}{4k+1}$$

har vi

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{x^{4k+5}}{x^{4k+1}} \cdot \frac{4k+1}{4k+5} \to x^4,$$

när $k \to \infty$. Kvotkriteriet ger att serien är (absolut)konvergent när $x^4 < 1$, dvs när $-1 < x < 1$, och divergent när $|x| > 1$.

När $x = 1$ är $a_k = 1/(4k+1)$. Med $b_k = 1/k$ gäller att

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{k}{4k+1} \to \frac{1}{4} > 0.$$

när $k \to \infty$. Eftersom det är känt att $\sum 1/k^p$ är divergent när $p \leq 1$ gäller att $\sum b_k$ är divergent. Enligt jämförelsekriteriet på gränsvärdesform gäller samma sak för $\sum a_k$, eftersom $1/4 > 0$.

När $x = -1$ har vi

$$a_k = -\frac{1}{4k+1}.$$

Eftersom $\sum a_k = -\sum(1/(4k+1))$ är den divergent enligt ovan.

Svar Potensserien är konvergent precis för x i intervallet $(-1, 1)$.

(b) Vi har

$$p'(x) = 1 + x^4 + x^8 + \cdots = \frac{1}{1-x^4}$$

och att $p(0) = 0$.

Vi får

$$\begin{aligned} p(x) &= \int \frac{1}{1-x^4}\,dx = \frac{1}{2}\int \Big(\frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1+x^2}\Big)\,dx = \\ &= \frac{1}{2}\int \Big(\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\Big) + \frac{1}{1+x^2}\Big)\,dx = \frac{1}{4}\cdot \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + \frac{1}{2}\cdot \arctan x + C. \end{aligned}$$

Eftersom $p(0) = 0$ är $C = 0$.

Svar: $p(x) = \ln(|(x+1)/(x-1)|)/4 + \arctan(x)/2$.

5. Ekvationen $x^2 + (2/x)^2 = 5$ har de positiva lösningarna $x = 1$, $x = 2$. Skivformeln ger att volymen ges av

$$\begin{aligned} \pi\int_1^2 \Big((\sqrt{5-x^2})^2 - \Big(\frac{2}{x}\Big)^2\Big)\,dx &= \pi\int_1^2 \Big(5 - x^2 - \frac{4}{x^2}\Big)\,dx = \pi\Big[5x - \frac{x^3}{3} + \frac{4}{x}\Big]_1^2 = \\ &= \pi\Big(10 - \frac{8}{3} + 2 - 5 + \frac{1}{3} - 4\Big) = \pi\Big(3 - \frac{7}{3}\Big) = \pi\cdot\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Svar: $2\pi/3$.

6. Med $f(t)$ som i texten är $f'(t)$ förändringstakten av mängden Polyphyphan i Rensjön vid tiden t. Vid tiden t är koncentrationen av ämnet i sjön $f(t)/V$ och det försvinner ut genom Bortan i takten $r\,\mathrm{m}^3/\mathrm{h}$. Avrinningen resulterar alltså i att det försvinner ur sjön i takten $rf(t)/V$ vid tiden t. Samtidig tillförs sjön ämnet i en konstant takt genom Tillan där koncentrationen är konstant c. Det resulterar i en ökning i takten rc.

   Detta ger $f'(t) = rc - rf(t)/V$.

   (a) Mängden av ämnet i sjön slutar öka då $0 = f'(t)$, dvs när $cr = rf/V$, vilket ger $f = cV$.

   Svar: cV kg.

   (b) Enligt ovan löser f ekvationen $Vf' = r(cV - f)$, $f(0) = 0$.

   Svar $f(t)$ löser begynnelsevärdesporblemet $Vy' = r(cV - y)$, $y(0) = 0$.

   (c) Ekvationen $Vf'(t) = r(cV - f(t))$ separeras och vi får

$$\int \frac{V}{cV - f}\,df = \int r\,dt.$$

   I högra ledet blir det $rt + C$, där C är en godtycklig konstant. I vänstra ledet får vi

$$\int \frac{V}{cV - f}\,df \quad = \quad -V\ln(cV - f).$$

   Vi får sambandet

$$-V\ln(cV - f(t)) = rt + C.$$

   Eftersom $f(0) = 0$ gäller att $C = -V\ln(cV)$. Divison med $-V$ ger $\ln(cV - f) = -rt/V + \ln(cV)$. Exponetierin ger

$$cV - f = cVe^{-rt/V} \qquad \text{och} \qquad f = cV(1 - e^{-rt/V}).$$

   Vi söker t så att $f(t)/V = c/2$, vilket ger $e^{-rt/V} = 1/2 = e^{-\ln 2}$, så $t = V\ln(2)/r$.

   Svar: $t = V\ln(2)/r$ timmar efter utsläppets start.

7. Enligt formeln för längden av en graf ska vi beräkna

$$L = \int_{\ln(3)/2}^{\ln(8)/2} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

   Vi har $f'(x) = e^x$ som ger att

$$L = \int_{\ln(3)/2}^{\ln(8)/2} \sqrt{1 + e^{2x}}\,dx.$$

   Vi prövar att sätta $t = \sqrt{1 + e^{2x}}$ och har $dt = e^{2x}/\sqrt{1 + e^{2x}}\,dx = (t^2 - 1)/t\,dx$, eller $(t/(t^2 - 1))\,dt = dx$.

Variabelbytet ger

$$\begin{aligned} L = \int_2^3 t \cdot \frac{t}{t^2-1}\,dt &= \int_2^3 \left(1 + \frac{1}{t^2-1}\right) dt = \int_2^3 \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)\right) dt = \\ &= \left[t + \frac{1}{2}\cdot \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right]_2^3 = 1 + \frac{1}{2}\cdot(-\ln 2 + \ln 3) = 1 + \frac{1}{2}\cdot \ln\left(\frac{3}{2}\right) \end{aligned}$$

Svar: $1 + \ln(3/2)/2$.

8. **Sats:** Om potensserien $p(x) = \sum c_n x^n$ konvergerar för $x = b$ ($b \neq 0$) och divergerar när $x = d$ ($d \neq 0$), så gäller att $p(x)$ konvergerar för alla x med $|x| < |b|$ och divergerar för alla x med $|x| > |d|$.

   Bevis Eftersom $\sum c_n b^n$ konvergerar gäller att $c_n b^n \to 0$, när $n \to \infty$. Det ger att det finns ett naturligt tal N så att $|c_n b^n| < 1$, för alla $n \geq N$. För sådan n har vi

$$|c_n x^n| = |c_n b^n| \cdot \left|\frac{x^n}{b^n}\right| < \left|\frac{x}{b}\right|^n.$$

   När $|x| < |b|$ är $|x/b| < 1$ och den geometriska serien $\sum_n |x/b|^n$ är konvergent. Jämförelsekriteriet för positiva serier ger nu att $\sum_{n=N} |c_n x^n|$ är konvergent, vilket också ger att $\sum_{n=0} |c_n x^n|$ är konvergent.

   För x med $|x| < |b|$ är potensserien därför absolutkonvergent och därmed (speciellt) konvergent.

   Om $|x| > |d|$ och $\sum c_n x^n$ vore konvergent, skulle enligt ovan $\sum c_n d^n$ vara konvergent, vilket strider mot förutsättningen. Alltså är $p(x)$ divergent när $|x| > |d|$.