Lösningar till MVE017 Matematisk analys i en variabel för I1 18-01-10

1. (a) Division ger

$$y' + \frac{15x}{3x^2+4} \cdot y = \frac{x}{\sqrt{3x^2+4}}.$$

Vi har

$$\int \frac{15x}{3x^2+4}\,dx = \frac{5}{2}\ln(3x^2+4),$$

vilket ger den integrerande faktorn $(3x^2+4)^{5/2}$. Ekvationen multipliceras med den och vi får

$$D((3x^2+4)^{5/2}y) = x(3x^2+4)^2.$$

Integration ger

$$(3x^2+4)^{5/2}y = (1/18)(3x^2+4)^3 + C.$$

Vi ska ha $y(0) = 1/9$ vilket ger $16 \cdot 2/9 = 16 \cdot 4/18 + C$, dvs $C = 0$.
Vi löser ut y och får $y = \sqrt{3x^2+4}/18$.

Svar: $y = \sqrt{3x^2+4}/18$.

(b) Den homogena ekvationen har karakteristisk ekvation $0 = r^2 - 6r + 10 = (r-3)^2 + 1$, som ger rötterna $r = 3 \pm i$. Lösningsformel ger att lösningarna är

$$y = e^{3x}(A\cos x + B\sin x),$$

där A och B är godtyckliga konstanter. Vi ska ha $y(0) = 0$, vilket ger $A = 0$, så $y = Be^{3x}\sin x$, som har $y' = Be^{3x}(3\sin x + \cos x)$. Vi ska ha $y'(0) = 1$, vilket ger $1 = B$.

Svar: $y(x) = e^{3x}\sin x$.

2. (a) Ansättning för partialbråksuppdelning ger

$$\frac{2x^2-4x+3}{(x-2)^2(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x+1}.$$

Handpåläggning ger $B = (8-8+3)/(2+1) = 1$, och $C = (2+4+3)/(-3)^2 = 1$.
Sätter vi $x = 0$ får vi

$$\frac{3}{4} = \frac{A}{-2} + \frac{1}{4} + 1,$$

vilket ger $A = 1$. Integration ger

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2-4x+3}{(x-2)^2(x+1)}\,dx &= \int \left(\frac{1}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{x+1}\right)dx = \\ &= \ln((x-2)(x+1)) - \frac{1}{x-2}\end{aligned}$$

Svar: $\ln((x-2)(x+1)) - 1/(x-2)$.

(b) Omskrivning med ger

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{1-\sin^2 t}{10\cos t + \sin 2t + \sin^2 t\cos t}\,dt = \int \frac{\cos^2 t}{10\cos t + 2\cos t\sin t + \sin^2 t\cos t}\,dt = \\
&= \int \frac{\cos t}{10 + 2\sin t + \sin^2 t}\,dt.
\end{aligned}
$$

Vi sätter $u = \sin t$ och har $du = \cos t\,dt$, vilket ger

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{du}{10 + 2u + u^2} = \int \frac{du}{9 + (1+u)^2} = \frac{1}{9}\int \frac{du}{1 + (\frac{1+u}{3})^2} = \\
&= \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{1+u}{3}\right) = \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{1+\sin t}{3}\right).
\end{aligned}
$$

Svar: $\arctan((1+\sin t)/3)/3$.

3. Vi har kända Maclaurinutvecklingar:

$$
\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \text{ termer av högre grad} \\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \text{ termer av högre grad} \\
e^t &= 1 + t + t^2/2! + t^3/3! + \text{ termer av högre grad} \\
\ln(1+t) &= t - t^2/2 + t^3/3 + \text{ termer av högre grad}
\end{aligned}
$$

Detta ger

$$
\begin{aligned}
x\arctan x - x\sin x &= (x^2 - x^4/3 + x^6/5 + \cdots) - (x^2 - x^4/6 + \cdots) = \\
&= -x^4/6 + \text{ termer av högre grad}
\end{aligned}
$$

och

$$
\begin{aligned}
e^{-x^2}\ln(1+x^2) - x^2 &= (1 - x^2 + x^4/2 + \cdots)(x^2 - x^4/2 + \cdots) - x^2 = \\
&= (-1 - 1/2)x^4 + \text{ termer av högre grad.}
\end{aligned}
$$

Detta ger

$$
\begin{aligned}
\frac{x\arctan x - x\sin x}{e^{-x^2}\ln(1+x^2) - x^2} &= \frac{-x^4/6 + \text{ termer av högre grad}}{-3x^4/2 + \text{ termer av högre grad}}. = \\
&= \frac{x^4}{x^4}\cdot\frac{-1/6 + \text{ termer med } x}{-3/2 + \text{ termer med } x} \to \frac{-1}{-9} = \frac{1}{9},
\end{aligned}
$$

när $x \to 0$.

Svar: $1/9$.

4. (a) Med

$$a_n = \frac{n^2 x^{n+1}}{(n+1)!}$$

har vi

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{x^{n+2}}{x^{n+1}}\right| \cdot \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{(n+1)!}{(n+2)!} = \\ &= |x|(1+1/n)^2 \frac{1}{n+2} \to 0 \end{aligned}$$

när $n \to \infty$. Kvotkriteriet ger att serien är (absolut)konvergent för alla x.

Svar Potensserien är konvergent för alla x.

(b) Med $p(x) = \sum n^2 x^{n+1}/(n+1)!$ har vi att den sökta summan är $p(2)$ och att

$$p'(x) = \sum_{n=1} \frac{n^2(n+1)x^n}{(n+1)!} = \sum_{n=1} \frac{nx^n}{(n-1)!} = x \sum_{n=1} \frac{nx^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Vi har

$$\sum_{n=1} \frac{nx^{n-1}}{(n-1)!} = D\Big(\sum_{n=1} \frac{x^n}{(n-1)!}\Big) = D\Big(x \sum_{n=0} \frac{x^n}{n!}\Big) = D(xe^x) = (1+x)e^x.$$

Detta ger $p'(x) = x(1+x)e^x$.
Vi får med partiell integration

$$\begin{aligned} p(x) &= \int (x^2+x)e^x\,dx = (x^2+x)e^x - \int (2x+1)e^x\,dx = \\ &= (x^2+x)e^x - (2x+1)e^x + \int 2e^x\,dx = (x^2-x+1)e^x + C. \end{aligned}$$

Eftersom $p(0) = 0$ är $C = -1$. Detta ger $p(2) = 3e^2 - 1$.

Svar: $3e^2 - 1$.

5. Ekvationen $2 = 8x/(x^2+3)$ blir efter omskrivning $x^2 - 4x + 3 = 0$, och har därför lösningarna $x = 1$ och $x = 3$. Om $f(x) = 8x/(x^2+3)$ kan volymen enligt skalformeln beräknas som

$$V = 2\pi \int_1^3 x\Big(\frac{8x}{x^2+3} - 2\Big)\,dx$$

Vi har

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_1^3 \Big(\frac{8(x^2+3)-24}{x^2+3} - 2x\Big)\,dx = 2\pi \int_1^3 \Big(\frac{-24}{3(1+(\frac{x}{\sqrt{3}})^2)} - 2x + 8\Big)\,dx = \\ &= 2\pi\Big[-8\sqrt{3}\arctan(\frac{x}{\sqrt{3}}) - x^2 + 8x\Big]_1^3 = 2\pi(8\sqrt{3}(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}) - 8 + 16) = 16\pi(1 - \frac{\sqrt{3}}{6}\pi) \end{aligned}$$

Svar: $16\pi(1 - \sqrt{3}\pi/6)$.

6. Vi låter $f(t)$ vara mängden (massan) salt (mätt i kg) i tanken vid tiden t (mätt i minuter) och $V(t)$ vara volymen vätska i tanken vid tiden t (mätt i liter).

   Enligt uppgift har vi $V(t) = 10^3 - 6t$ och att

$$f'(t) = 6 \cdot \frac{1}{3} - 12 \cdot \frac{f(t)}{V(t)}$$

   eftersom $f(x)/V(t)$ är koncentrationen salt i tanken vid tiden t. Vi har $f(0) = 0$, så funktionen löser begynnelsevärdesproblemet

$$y' + \frac{12}{10^3 - 6t} y = 2, \quad y(0) = 0.$$

   Vi har

$$\int \frac{12}{10^3 - 6t}\, dt \quad = \quad -2\ln(10^3 - 6t),$$

   så $(10^3 - 6t)^{-2}$ är en integrerande faktor. Multiplikation med den ger ekvationen

$$D((10^3 - 6t)^{-2} y) = 2(10^3 - 6t)^{-2},$$

   som integreras till

$$(10^3 - 6t)^{-2} y = (1/3)(10^3 - 6t)^{-1} + C.$$

   Eftersom $y(0) = 0$ har vi att $C = -(1/3)10^{-3}$. Vi löser ut y och får

$$\begin{aligned} f(t) = y(t) \quad &= \quad (10^3 - 6t)/3 - 10^{-3}(10^3 - 6t)^2/3 = (10^3 - 6t)(1 - 10^{-3}(10^3 - 6t))/3 = \\ &= \quad 2 \cdot 10^{-3} t(10^3 - 6t) = 2(t - 6 \cdot 10^{-3} t^2). \end{aligned}$$

   Detta ger $f'(t) = 2(1 - 12 \cdot 10^{-3} t)$, som visar att $f(t)$ har sitt maximum när $t = 10^3/12$. Den maximala saltmängden i tanken är därför

$$f(10^3/12) = (1/6)(10^3 - 10^3/2) = 10^3/12.$$

   Svar: Mängden salt vid tiden t minuter efter start är $2(t - 6 \cdot 10^{-3} t^2)$ kg. Maximala saltmängden är $10^3/12$ kg och det sker $10^3/12$ minuter efter start.

7. Sätter vi $f(x) = \ln x$ har vi $f'(x) = 1/x$ och $\sqrt{1 + f'(x)^2} = \sqrt{1 + x^2}/x$. Formeln för båglängd ger att den sökta längden är

$$L = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x}\, dx.$$

   Vi gör variabelbytet $x = \tan t$ och har $dx = (1 + \tan^2 t)\, dt$ och $\sqrt{1 + x^2} = 1/\cos t$. Vi får

$$L \quad = \quad \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1}{\cos t} \cdot \frac{1}{\tan x} \cdot (1 + \tan^2 t)\, dt = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \left(\frac{1}{\sin t} + \frac{\sin t}{\cos^2 t} \right) dt$$

   Vi delar upp kalkylen i två integraler och gör i den första en omskrivning och variabelbytet $u = \cos t$:

$$\begin{aligned} I_1 \quad &= \quad \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1}{\sin t}\, dt = -\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sin t}{1 - \cos^2 t}\, dt = -\int_{1/\sqrt{2}}^{1/2} \frac{1}{(1-u)(1+u)}\, du = \\ &= \quad -\frac{1}{2} \int_{1/\sqrt{2}}^{1/2} \left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u} \right) du = -\frac{1}{2} \left[\ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right| \right]_{1/\sqrt{2}}^{1/2} = -\frac{1}{2} \cdot \ln \left(\frac{3/2}{1/2} \cdot \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \right) = \\ &= \quad -\frac{1}{2} \cdot \ln(3(\sqrt{2} - 1)^2) \end{aligned}$$

Den andra integralen ger

$$I_2 = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sin t}{\cos^2 t}\, dt = \left[\frac{1}{\cos t} \right]_{\pi/4}^{\pi/3} = 2 - \sqrt{2}.$$

Summering ger längden $2 - \sqrt{2} - \ln(9 - 6\sqrt{2})/2$.

Svar: $2 - \sqrt{2} - \ln(9 - 6\sqrt{2})/2$.